Nicolae Cotfas

INTRODUCERE ÎN ANALIZA FOURIER-LAPLACE

- Versiunea 10 martie 2015 -

http://fpcm5.fizica.unibuc.ro/~ncotfas/
E-mail: ncotfas@yahoo.com **Tel: 074 278 4634**

Introducere

Prezentare centrată pe exemple, aplicaţii şi calcul numeric cu teoria redusă la elementele strict necesare, prezentate accesibil, precis, clar şi concis.

.....

Bucureşti, 2013 Nicolae Cotfas

Cuprins

1 Introducere **7**
1.1 Elemente de trigonometrie 7
1.2 Numere complexe 10
1.3 Funcţii complexe de variabilă reală 13
1.4 Derivarea funcţiilor complexe de variabilă reală 16
1.5 Integrarea funcţiilor complexe 19
1.6 Serii de puteri 23
1.7 Spaţii cu produs scalar 25

2 Serii Fourier **31**
2.1 Exemple 31
2.2 Aplicaţii 50
2.3 Definiţii şi rezultate fundamentale 50

3 Transformarea Fourier discretă **55**
3.1 Definiţie şi exemple 55
3.2 Transformarea Fourier rapidă 63
3.3 Proprietăţi ale transformării Fourier 64
3.4 Funcţii proprii ale transformării Fourier 64
3.5 Transformarea Fourier bidimensională 65
3.6 Aplicaţii 70
3.7 Definiţii şi rezultate fundamentale 70

4 Transformarea Fourier a funcţiilor **77**
4.1 Exemple 77

4.2 Aplicaţii 82
4.3 Definiţii şi rezultate fundamentale 82

5 Transformarea Fourier a distribuţiilor 89
5.1 Exemple 89
5.2 Aplicaţii 101
5.3 Definiţii şi rezultate fundamentale 101

6 Transformarea Laplace a funcţiilor 119
6.1 Exemple 119
6.2 Aplicaţii 119
6.3 Definiţii şi rezultate fundamentale 119

7 Transformarea Laplace a distribuţiilor 121
7.1 Exemple 121
7.2 Aplicaţii 121
7.3 Definiţii şi rezultate fundamentale 121

8 Transformarea Laplace finită 123
8.1 Exemple 123
8.2 Aplicaţii 123
8.3 Definiţii şi rezultate fundamentale 123

Capitolul 1

Introducere

Pe parcursul acestui capitol vom prezenta cateva elemente ale apartului matematic care va fi utilizat în capitolele următoare.

1.1 Elemente de trigonometrie

1.1.1 Se ştie că unghiurile posibile, masurate în radiani, pot fi reprezentate in mod natural pe circumferinţa cercului trigonometric (vezi fig. 1.1). Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, unghiurile

$$..., \ t-4\pi, \ t-2\pi, \ t, \ t+2\pi, \ t+4\pi, \ ...$$

se reprezintă în acelaşi punct.

1.1.2 Definiţie. Funcţia *cosinus* este funcţia (vezi fig. 1.1)

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] : \ t \mapsto \cos t$$

unde $\cos t$ este coordonata proiecţiei pe axa orizontală a punctului în care se reprezintă t pe circumferinţa cercului trigonometric.

1.1.3 Definiţie. Funcţia *sinus* este funcţia (vezi fig. 1.1)

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] : \ t \mapsto \sin t$$

unde $\sin t$ este coordonata proiecţiei pe axa verticală a punctului în care se reprezintă t pe circumferinţa cercului trigonometric.

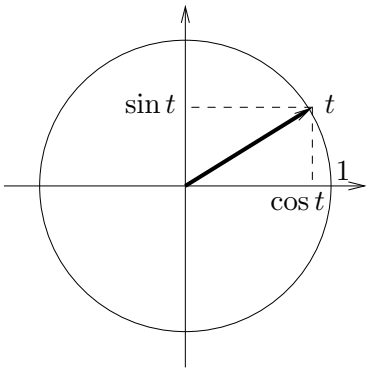

Figura 1.1: Funcţiile cosinus şi sinus.

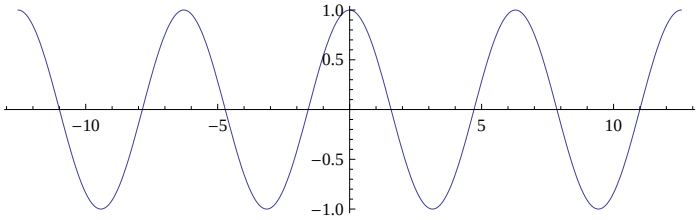

Figura 1.2: Graficul funcţiei cosinus.

1.1.4 Direct din definiţiile anterioare rezultă că:

- Funcţiile *cosinus* şi *sinus* sunt periodice cu perioada principală 2π

$$\begin{array}{l}\cos(t+2\pi)=\cos t\\ \sin(t+2\pi)=\sin t\end{array} \qquad \text{oricare ar fi} \quad t\in\mathbb{R}.$$

- Funcţia *cosinus* este funcţie pară şi *sinus* impară

$$\begin{array}{l}\cos(-t)=\cos t\\ \sin(-t)=-\sin t\end{array} \qquad \text{oricare ar fi} \quad t\in\mathbb{R}.$$

- Funcţiile *cosinus* şi *sinus* verifică relaţia fundamentală

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1 \qquad \text{oricare ar fi} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

1.1.5 Unele valori se pot determina simplu utilizând geometria elementară

	$t=0$	$t=\frac{\pi}{6}$	$t=\frac{\pi}{4}$	$t=\frac{\pi}{3}$	$t=\frac{\pi}{2}$	$t=\pi$	$t=\frac{3\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

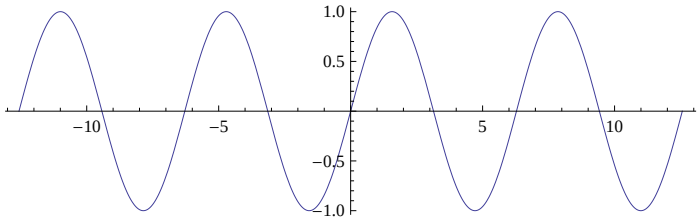

Figura 1.3: Graficul funcţiei sinus.

1.1.6 Utilizând geometria elementară se poate arăta că au loc relaţiile fundamentale

$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin a\, \cos b \pm \cos a\, \sin b \\ \cos(a \pm b) &= \cos a\, \cos b \mp \sin a\, \sin b\end{aligned} \qquad \text{oricare ar fi} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

adică

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a\, \cos b + \cos a\, \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a\, \cos b - \cos a\, \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b \\ \cos(a - b) &= \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b\end{aligned} \qquad \text{oricare ar fi} \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

1.1.7 Utilizând (1.1) şi (1.2) se pot obţine relaţiile

$$\sin a = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right)$$
$$\cos a = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right)$$
$$\sin 2a = 2\, \sin a\, \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\, \cos^2 a - 1 = 1 - 2\, \sin^2 a$$
$$\cos^2 a = \tfrac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \tfrac{1-\cos 2a}{2}$$
$$\sin a\, \cos b = \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)],$$
$$\cos a\, \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)],$$
$$\sin a\, \sin b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$
$$\sin a + \sin b = 2\, \sin \tfrac{a+b}{2}\, \cos \tfrac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\, \sin \tfrac{a-b}{2}\, \cos \tfrac{a+b}{2}$$
$$\cos a + \cos b = 2\, \cos \tfrac{a+b}{2}\, \cos \tfrac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\, \sin \tfrac{a-b}{2}\, \sin \tfrac{a+b}{2}$$

1.2 Numere complexe

1.2.1 Definiţie. In cazul unui număr complex

$$z = x + y\mathrm{i}$$

$\mathfrak{Re}\, z = x$ se numeşte *partea reală* a lui z.

$\mathfrak{Im}\, z = y$ se numeşte *partea imaginară* a lui z.

$\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ se numeşte *conjugatul* lui z.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se numeşte *modulul* lui z.

1.2.2 Direct din definiţie rezultă următoarele relaţii

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1\, z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2 \qquad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$|\bar{z}| = |z| \qquad |z|^2 = z\,\bar{z} \qquad \overline{(\bar{z})} = z$$

$$\mathfrak{Re}\, z = \tfrac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathfrak{Im}\, z = \tfrac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}} \qquad z = \mathfrak{Re}\, z + \mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\, z.$$

1.2.3 MATHEMATICA `Re[x+y I]`, `Im[x+y I]`, `Abs[x+y I]`, `Conjugate[x+y I]`

`In[1]:=I`	$\mapsto$	Out[1]= i	`In[5]:=Re[3+4 I]`	$\mapsto$	Out[5]=3
`In[2]:=Sqrt[-4]`	$\mapsto$	Out[2]=2 i	`In[6]:=Im[3+4 I]`	$\mapsto$	Out[6]=4
`In[3]:=(3+2 I)^2`	$\mapsto$	Out[3]=5+12 i	`In[7]:=Abs[3+4 I]`	$\mapsto$	Out[7]=5
`In[4]:=(3+2 I)/(5-I)`	$\mapsto$	Out[4]=$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$	`In[8]:=Conjugate[3+4 I]`	$\mapsto$	Out[8]=3−4 i.

1.2.4 Se ştie că $\mathrm{i}^2 = -1$ şi

$$(a + \mathrm{i}) \pm (\alpha + \beta\mathrm{i}) = (a \pm \alpha) + (b \pm \beta)\mathrm{i}$$
$$(a + b\mathrm{i})(\alpha + \beta\mathrm{i}) = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)\mathrm{i}$$
$$\tfrac{a+b\mathrm{i}}{\alpha+\beta\mathrm{i}} = \tfrac{(a+b\mathrm{i})(\alpha-\beta\mathrm{i})}{(\alpha+\beta\mathrm{i})(\alpha-\beta\mathrm{i})} = \tfrac{(a\alpha+b\beta)+(-a\beta+b\alpha)\mathrm{i}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

De exemplu,

$$(2 + 3\mathrm{i}) + (1 + 2\mathrm{i}) = 3 + 5\mathrm{i}$$
$$(2 + 3\mathrm{i}) - (1 + 2\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$$
$$(2 + 3\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i}) = -4 + 7\mathrm{i}$$
$$\tfrac{2+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \tfrac{(2+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \tfrac{8-\mathrm{i}}{5} = \tfrac{8}{5} - \tfrac{1}{5}\mathrm{i}.$$

1.2.5 Teoremă. *Relaţiile*

$$\begin{array}{ll} a) & |(x_1{+}y_1\mathrm{i}) + (x_2{+}y_2\mathrm{i})| \le |x_1{+}y_1\mathrm{i}| + |x_2{+}y_2\mathrm{i})| \\ b) & |(x_1{+}y_1\mathrm{i})(x_2{+}y_2\mathrm{i})| = |x_1{+}y_1\mathrm{i}|\ |x_2{+}y_2\mathrm{i})| \\ c) & \left.\begin{array}{c}|x|\\|y|\end{array}\right\} \le |x+y\mathrm{i}| \le |x| + |y| \end{array} \tag{1.3}$$

au loc oricare ar fi numerele $x_1{+}y_1\mathrm{i},\ \ x_2{+}y_2\mathrm{i},\ \ x{+}y\mathrm{i}$.

Demonstraţie. a) Relaţia

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

putând fi scrisă sub forma

$$0 \le (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

şi deci adevărată, avem

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

şi prin urmare,

$$\begin{aligned} |(x_1{+}y_1\mathrm{i}) + (x_2{+}y_2\mathrm{i})|^2 &= (x_1{+}x_2)^2 + (y_1{+}y_2)^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 \\ &\le x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2|x_1x_2 + y_1y_2| \\ &\le x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &= |x_1{+}y_1\mathrm{i}|^2 + |x_2{+}y_2\mathrm{i}|^2 + 2|x_1{+}y_1\mathrm{i}|\ |x_2{+}y_2\mathrm{i}| \\ &= (|x_1{+}y_1\mathrm{i}| + |x_2{+}y_2\mathrm{i})|)^2. \end{aligned}$$

b) Avem

$$\begin{aligned} |(x_1{+}y_1\mathrm{i})(x_2{+}y_2\mathrm{i})|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |x_1{+}y_1\mathrm{i}|^2\,|x_2{+}y_2\mathrm{i})|^2. \end{aligned}$$

c) Avem

$$\begin{aligned} |x + y\mathrm{i}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{x^2} = |x| \\ |x + y\mathrm{i}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{y^2} = |y| \end{aligned}$$

iar relaţia

$$\sqrt{x^2+y^2} \le |x| + |y|$$

este echivalentă cu relaţia evident adevărată

$$x^2 + y^2 \le (|x| + |y|)^2.$$

1.2.6 Relaţiile (1.3) se mai pot scrie

$$\begin{aligned} &a) \quad |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2| \\ &b) \quad |z_1\, z_2| = |z_1|\, |z_2| \\ &c) \quad \left.\begin{matrix} |\mathfrak{Re}\, z| \\ |\mathfrak{Im}\, z| \end{matrix}\right\} \le |z| \le |\mathfrak{Re}\, z| + |\mathfrak{Im}\, z|. \end{aligned}$$

1.2.7 Numărul

$$|(x+y\mathrm{i}) - (a+b\mathrm{i})| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

reprezintă distanţa în planul complex între $x+y\mathrm{i}$ şi $a+b\mathrm{i}$.

1.2.8 Definiţie. Spunem că şirul $(x_n+y_n\mathrm{i})_{n\ge 0}$ *converge* la $a+b\mathrm{i}$ şi scriem

$$\lim_{n\to\infty} (x_n+y_n\mathrm{i}) = a+b\mathrm{i}$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} |(x_n+y_n\mathrm{i}) - (a+b\mathrm{i})| = 0.$$

1.2.9 Teoremă. *Avem*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n+y_n\mathrm{i}) = a+b\mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n+y_n\mathrm{i}) = \lim_{n\to\infty} x_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din relaţia (a se vedea teorema de la pag. 11-**5**)

$$\left.\begin{matrix} |x_n - a| \\ |y_n - b| \end{matrix}\right\} \le |(x_n-a) + (y_n-b)\mathrm{i}| \le |x_n-a| + |y_n-b|.$$

1.2.10 *Formula lui Euler*. Prin definiţie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\, \sin t \qquad \text{oricare ar fi} \quad t\in\mathbb{R}.$$

In particular,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+y\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{y\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x\, (\cos y + \mathrm{i}\, \sin y).$$

1.2.11 Din relaţia

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} &= (\cos a + \mathrm{i}\,\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\,\sin b) \\ &= (\cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b) + \mathrm{i}(\cos a\,\sin b + \sin a\,\cos b) \\ &= \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} \end{aligned}$$

rezultă că

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} \qquad \text{oricare ar fi} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1.2.12 Pentru orice număr nenul $z = x + y\mathrm{i}$ există $\arg z \in (-\pi, \pi]$, numit *argumentul principal* al lui z, astfel încât

$$z = |z|(\cos(\arg z) + \mathrm{i}\sin(\arg z)) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}.$$

De exemplu,

$$\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, \qquad 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

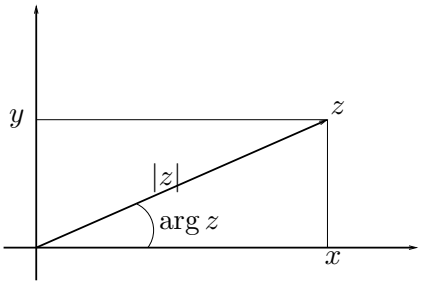

Figura 1.4: Modulul şi argumentul unui număr complex

1.3 Funcţii complexe de variabilă reală

1.3.1 Definiţie. Prin *funcţie complexă* se înţelege o funcţie cu valori complexe. In cazul unei funcţii complexe de variabilă reală

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(t) = u(t) + \mathrm{i}\,v(t)$$

definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ funcţia

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

reprezintă *partea reală* a lui f, iar

$$v : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

partea imaginară a lui f.

1.3.2 Relaţia

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\,\sin t$$

defineşte o funcţie periodică

$$f(t + 2\pi) = \cos(t + 2\pi) + \mathrm{i}\,\sin(t + 2\pi) = \cos t + \mathrm{i}\,\sin t = f(t)$$

cu partea reală

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u(t) = \cos t$$

şi partea imaginară

$$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad v(t) = \sin t.$$

1.3.3 Din relaţiile

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\,\sin t \qquad \text{şi} \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = \cos t - \mathrm{i}\,\sin t$$

se obţin formulele

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \qquad \text{şi} \qquad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}.$$

1.3.4 Pentru $T \in (0, \infty)$ fixat, funcţia complexă

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}t} = \cos\tfrac{2\pi}{T}t + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{2\pi}{T}t$$

este o funcţie periodică cu perioada principală T

$$f(t + T) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}(t+T)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}t} = f(t).$$

1.3.5 Teoremă. *Fie* $t_0 \in I$ *şi*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(t) = u(t) + \mathrm{i}\,v(t).$$

Avem

$$f \ \ \textit{este continuă în} \ \ t_0 \iff \begin{cases} u & \textit{este continuă în} \ \ t_0 \\ v & \textit{este continuă în} \ \ t_0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Din relaţia

$$\left.\begin{matrix} |u(t) - u(t_0)| \\ |v(t) - v(t_0)| \end{matrix}\right\} \leq |f(t) - f(t_0)| \leq |u(t) - u(t_0)| + |v(t) - v(t_0)|$$

rezultă că

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{t\to t_0} u(t) = u(t_0) \\ \lim_{t\to t_0} v(t) = v(t_0) \end{cases}$$

iar

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) = u(t_0) + \mathrm{i}\, v(t_0) = \lim_{t\to t_0} u(t) + \mathrm{i} \lim_{t\to t_0} v(t) = f(t_0).$$

1.3.6 In cazul limitelor laterale

$$f(t_0-) = \lim_{t\nearrow t_0} f(t) = \lim_{t\nearrow t_0} u(t) + \mathrm{i} \lim_{t\nearrow t_0} v(t) = u(t_0-) + \mathrm{i}\, v(t_0-)$$
$$f(t_0+) = \lim_{t\searrow t_0} f(t) = \lim_{t\searrow t_0} u(t) + \mathrm{i} \lim_{t\searrow t_0} v(t) = u(t_0+) + \mathrm{i}\, v(t_0+).$$

1.3.7 Definiţie. Spunem că funcţia f că este *continuă pe porţiuni în* $[a,b]$ dacă este continuă în (a,b), exceptând eventual un număr finit de puncte t_1, t_2, ..., t_n, iar limitele laterale

$$f(a+),\ f(t_1-),\ f(t_1+),\ \ldots,\ f(t_n-),\ f(t_n+),\ f(b-)$$

există şi sunt finite.
Spunem că funcţia f că este *continuă pe porţiuni în* $\mathbb{R}$ dacă este continuă pe porţiuni în orice interval $[a,b]$.

1.3.8 Funcţia (vezi Fig. 1.5)

$$f:[-1,2]\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} t^2-1 & \text{dacă} \quad -1\le t\le 0 \\ t & \text{dacă} \quad 0<t\le 2 \end{cases}$$

este continuă pe porţiuni în $[-1,2]$, dar funcţia

$$g:[-1,2]\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t^2-1 & \text{dacă} \quad -1\le t\le 0 \\ \frac{1}{t} & \text{dacă} \quad 0<t\le 2 \end{cases}$$

nu este continuă pe porţiuni în $[-1,2]$ deoarece $g(0+)=\infty$.

1.3.9 Dacă se modifică valorile unei funcţii continue pe porţiuni într-un număr finit de puncte se obţine tot o funcţie continuă pe porţiuni.

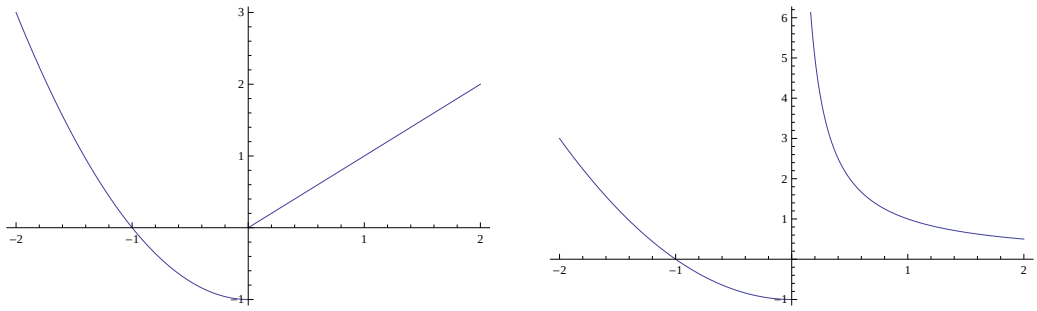

Figura 1.5: Graficele funcţiilor f şi g.

1.4 Derivarea funcţiilor complexe de variabilă reală

1.4.1 Definiţie. Spunem că funcţia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ este o *funcţie derivabilă* în punctul $t_0 \in I$ dacă există şi este finită limita

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

numită *derivata* lui f în t_0.

1.4.2 Exemple.

a) Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$ este derivabilă în orice punct $t_0 \in \mathbb{R}$ deoarece

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{x \to a} \frac{t^3 - t_0^3}{t - t_0} = \lim_{x \to a} (t^2 + t\, t_0 + t_0^2) = 3\, t_0^2.$$

In acest caz, $f'(t_0) = 3\, t_0^2$, oricare ar fi $t_0 \in \mathbb{R}$, adică avem $(t^3)' = 3t^2$.

b) Funcţia $f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{t}$ este derivabilă în orice punct $t_0 \in (0, \infty)$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t_0}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t_0}} = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}.$$

In acest caz, $f'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}$, oricare ar fi $t_0 \in (0, \infty)$, adică avem $(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

1.4.3 Derivatele unor funcţii uzuale

Funcţia		Derivata	Domeniul	Condiţii
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=c$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n\in\mathbb{N}^*$
$f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=x^\alpha$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,\infty)$	$\alpha\in\mathbb{R}$
$f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$	
$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(0,\infty)$	$n\in2\mathbb{N}^*$
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}^*$	$n\in2\mathbb{N}+1$
$f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln a$	$\mathbb{R}$	$0<a\neq1$
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}-(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi)\to\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{tg}\,x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi)$	
$f:\mathbb{R}-\mathbb{Z}\pi\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{ctg}\,x$	$f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}-\mathbb{Z}\pi$	
$f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\arcsin x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	
$f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{arctg}x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{arcctg}x$	$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{sh}\,x$	$f'(x)=\mathrm{ch}\,x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{ch}\,x$	$f'(x)=\mathrm{sh}\,x$	$\mathbb{R}$	

1.4.4 MATHEMATICA: `D[f[x], x]`

`In[1]:=D[f[x], x]` $\mapsto$ Out[1]=$f'[x]$ `In[5]:=D[Log[x], x` $\mapsto$ Out[5]=$\frac{1}{x}$

`In[2]:=D[x^n, x]` $\mapsto$ Out[2]=nx^{-1+n} `In[6]:=D[Sin[x], x]` $\mapsto$ Out[6]=Cos$[x]$

`In[3]:=D[1/x, x]` $\mapsto$ Out[3]=$-\frac{1}{x^2}$ `In[7]:=D[ArcSin[x], x]` $\mapsto$ Out[7]=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

`In[4]:=D[Sqrt[x], x]` $\mapsto$ Out[4]=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ `In[8]:=D[ArcTan[x], x]` $\mapsto$ Out[8]=$\frac{1}{1+x^2}$.

1.4.5 Avem

$$(f+g)'=f'+g'\,,\qquad (f+g)''=f''+g''\,,\quad \ldots$$

dar

$$(fg)'=f'g+fg'\,,\qquad (fg)''=f''g+2f'g'+fg''\,,\quad \ldots$$

In cazul derivatei de ordinul n are loc formula lui Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)} \, g^{(k)}$$
$$= C_n^0 f^{(n)} \, g + C_n^1 f^{(n-1)} \, g' + \cdots + C_n^{n-1} f' g^{(n-1)} + C_n^n f g^{(n)}$$

similară cu binomul lui Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

1.4.6 In cazul unei funcţii complexe de variabilă reală

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(t) = u(t) + \mathrm{i}\, v(t)$$

derivabile în t_0 avem

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + \mathrm{i} \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

adică,

$$f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}\, v'(t_0).$$

1.4.7 Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat, avem

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\right)' = (\cos \alpha t)' + \mathrm{i}(\sin \alpha t)'$$
$$= -\alpha \, \sin \alpha t + \mathrm{i}\, \alpha \, \cos \alpha t$$
$$= \mathrm{i}\, \alpha (\cos \alpha t + \mathrm{i} \, \sin \alpha t) = \mathrm{i}\alpha \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$$

adică,

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\right)' = \mathrm{i}\alpha \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}.$$

1.4.8 Dacă $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă atunci

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\right)' = (\cos \varphi(t))' + \mathrm{i}\, (\sin \varphi(t))'$$
$$= -\varphi'(t) \, \sin \varphi(t) + \mathrm{i}\, \varphi'(t) \, \cos \varphi(t)$$
$$= \mathrm{i}\, \varphi'(t) (\cos \varphi(t) + \mathrm{i} \, \sin \varphi(t)) = \mathrm{i}\varphi'(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$$

adică,

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\right)' = \mathrm{i}\varphi'(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}.$$

1.4.9 Definiţie. Spunem despre o funcţie continuă pe porţiuni f că este *netedă pe porţiuni în* $[a, b]$ dacă derivata f' este continuă pe porţiuni în $[a, b]$. Spunem că funcţia f că este *netedă pe porţiuni în* $\mathbb{R}$ dacă este netedă pe porţiuni în orice interval $[a, b]$.

1.5 Integrarea funcţiilor complexe

1.5.1 Definiţie. Prin *primitivă* a unei funcţii $f: I \to \mathbb{R}$ se înţelege o funcţie derivabilă $F: I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in I.$$

1.5.2 Dacă $F_1, F_2: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţiei $f: I \to \mathbb{R}$ atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1 = F_2 + c$.

Vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor constante definite pe intervalul considerat.

Mulţimea primitivelor unei funcţii f se notează cu $\int f(x)dx$, adică

$$\int f(x)dx = \{\ F: I \to \mathbb{R} \ \mid \ F \ \text{ este primitivă a lui } \ f\ \}.$$

1.5.3 Primitivele unor funcţii uzuale

(I este un interval inclus în domeniul maxim de derivabilitate al primitivelor)

Funcţia	Mulţimea primitivelor	Intervalul	Condiţii
$f(x) = 1$	$\int dx = x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$f(x) = x^\alpha$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + \mathcal{C}$	$I \subseteq (0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$	
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}\, a^x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$0 < a \neq 1$
$f(x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$	
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$	
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$I \subseteq (-a, a)$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - [-a, a]$	$a > 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \{\pm a\}$	$a \neq 0$
$f(x) = \operatorname{sh} x$	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	

1.5.4 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[f[x], x]`	$\mapsto$	Out[1]$=\int f(x)\,dx$
`In[2]:=Integrate[x^a, x]`	$\mapsto$	Out[2]$=\frac{x^{1+a}}{1+a}$
`In[3]:=Integrate[a^x, x]`	$\mapsto$	Out[3]$=\frac{a^x}{\mathrm{Log}\,[a]}$
`In[4]:=Integrate[1/Sqrt[x^2+a^2], x]`	$\mapsto$	Out[4]$=\mathrm{Log}\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right]$

1.5.5 Teoremă (Integrarea prin părţi).
Dacă funcţiile $f, g: I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile şi au derivate continue atunci

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

1.5.6 Exerciţiu. Să se calculeze

$$\int x\mathrm{e}^x dx, \qquad \int \ln x\,dx.$$

Rezolvare. Avem

$\int x\mathrm{e}^x dx = \int x(\mathrm{e}^x)'dx = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathcal{C}$

$\int \ln x\,dx = \int x' \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,(\ln x)'dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + \mathcal{C}$

1.5.7 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[x Exp[x], x]`	$\mapsto$	Out[1]$=\mathrm{e}^x(-1+x)$
`In[2]:=Integrate[Log[x], x]`	$\mapsto$	Out[2]$=-x+x\,\mathrm{Log}\,[x]$

1.5.8 Teoremă (Schimbarea de variabilă). *Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale şi $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă $\varphi : I \longrightarrow J$ este derivabilă şi F este o primitivă a lui f atunci $I \to \mathbb{R} : x \mapsto (F\circ\varphi)(x) = F(\varphi(x))$ este o primitivă a funcţiei $I \to \mathbb{R} : x \mapsto f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, adică*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \left(\int f(t)\,dt\right)\circ\varphi.$$

Demonstraţie. Avem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$.

1.5.9 Exerciţiu. Să se calculeze

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Rezolvare. Avem

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'dx = 2\left(\int \mathrm{e}^t dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathcal{C}.$$

1.5.10 **MATHEMATICA:** `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[Exp[Sqrt[x]]/Sqrt[x], x]` $\mapsto$ Out[1]=$2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

1.5.11 Funcţia complexă

$$F : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F(t) = U(t) + \mathrm{i}\,V(t)$$

este o primitivă a funcţiei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(t) = u(t) + \mathrm{i}\,v(t)$$

dacă

$$F'(t) = f(t) \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in I.$$

adică dacă

$$U'(t) + \mathrm{i}\,V'(t) = u(t) + \mathrm{i}\,v(t) \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in I.$$

Ultima relaţie are loc dacă şi numai dacă

$$\begin{matrix} U'(t) = u(t) \\ V'(t) = v(t) \end{matrix} \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in I$$

adică dacă U este primitivă a lui u şi V este primitivă a lui v.

1.5.12 Pentru $\alpha \neq 0$ fixat,

$$F : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$$

este o primitivă a funcţiei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$$

deoarece

$$\left(\frac{1}{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\right)' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}.$$

1.5.13 Ştim că dacă $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ atunci

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = F(t)\big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

oricare ar fi intervalul $[\alpha, \beta] \subset I$.

1.5.14 Dacă $F : I \longrightarrow \mathbb{C},\ F(t) = U(t) + \mathrm{i}\,V(t)$ este o primitivă a funcţiei $f : I \longrightarrow \mathbb{C},\ f(t) = u(t) + \mathrm{i}\,v(t)$ atunci

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt &= \textstyle\int_\alpha^\beta u(t)\,dt + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta v(t)\,dt \\ &= U(t)\big|_{t=\alpha}^{t=\beta} + \mathrm{i}\,V(t)\big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\beta) - F(\alpha) \end{aligned}$$

oricare ar fi intervalul $[\alpha, \beta] \subset I$.

1.5.15 Exerciţiu. Să se arate că

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,dt=\delta_{nk}.$$

Rezolvare. Dacă $n=k$ atunci

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt=1$$

iar dacă $n\neq k$ atunci

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)t}\,dt=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(k-n)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)t}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

1.5.16 O funcţie continuă pe porţiuni este integrabilă pe orice interval finit.

1.5.17 Teoremă (Formula de integrare prin părţi).

Dacă funcţiile $f,g:I\to\mathbb{R}$ au derivate continue pe intervalul I atunci

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt=f(t)\,g(t)\big|_a^b-\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

oricare ar fi $a,b\in I$.

Demonstraţie. Utilizând formula Leibniz-Newton obţinem

$$\begin{aligned}f(t)\,g(t)\big|_a^b=\textstyle\int_a^b(f\cdot g)'(t)\,dt&=\textstyle\int_a^b(f'(t)g(t)+f(t)g'(t))dt\\&=\textstyle\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt+\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.\end{aligned}$$

1.5.18 Exerciţiu. Să se calculeze integralele

$$\int_0^{\pi}x\,\cos x\,dx\qquad\qquad\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,dx.$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părţi obţinem

$$\textstyle\int_0^{\pi}t\,\cos t\,dt=\int_0^{\pi}t\,(\sin t)'\,dt=x\,(\sin t)\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\cos t\big|_0^{\pi}=-1-1=-2$$

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^t\,dt=\int_0^1 t^2\,(\mathrm{e}^t)'\,dt&=t^2\,\mathrm{e}^t\big|_0^1-2\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,dt=\mathrm{e}-2\int_0^1 t\,(\mathrm{e}^t)'\,dt\\&=\mathrm{e}-2t\,\mathrm{e}^t\big|_0^1+2\int_0^1\mathrm{e}^t\,dt=-\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}^t\big|_0^1=\mathrm{e}-2.\end{aligned}$$

1.5.19 MATHEMATICA: `Integrate[f[t], {t, a, b}]` `NIntegrate[f[t], {t, a, b}]`

```
In[1]:=Integrate[t Cos[t], {t, 0, Pi}]   ↦  Out[1]=-2
In[2]:=Integrate[t^2 Exp[t], {t, 0, 1}]  ↦  Out[2]=-2+e
```

1.5.20 Teoremă (Schimbarea de variabilă).

Fie funcţiile $[a,b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, *unde* $J \subset \mathbb{R}$ *este un interval.*

Dacă f *este continuă şi* φ *este derivabilă cu derivata continuă atunci*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Demonstraţie. Dacă $F' = f$ atunci $F\circ\varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ şi

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = (F\circ\varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

1.5.21 Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este *funcţie impară*, adică $f(-t) = -f(t)$ oricare ar fi t, atunci

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt &= \textstyle\int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = -\int_{-a}^{0} f(-t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt\\ &= \textstyle\int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Dacă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este *funcţie pară*, adică $f(-t) = f(t)$ oricare ar fi t, atunci

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt &= \textstyle\int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(-t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt\\ &= -\textstyle\int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt.\end{aligned}$$

1.6 Serii de puteri

1.6.1 Ştim că

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \text{nu există} & \text{dacă} \quad x \le -1\\ 0 & \text{dacă} \quad -1 < x < 1\\ 1 & \text{dacă} \quad x = 1\\ \infty & \text{dacă} \quad 1 < x.\end{cases}$$

Plecând de la formula diferenţei de cuburi

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

deducem relaţia

$$1 - q^3 = (1-q)(1+q+q^2)$$

care in cazul $q \neq 1$ se poate scrie

$$1 + q + q^2 = \frac{1-q^3}{1-q}$$

şi reprezintă un caz particular pentru *suma progresiei geometrice*

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{pentru} \quad q\neq 1.$$

1.6.2 Dacă $|x|<1$ atunci

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+\cdots &= \lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\tfrac{1}{1-x} \end{aligned}$$

adică funcţia

$$(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}:\ x\mapsto\frac{1}{1-x}$$

admite dezvoltarea in serie de puteri

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots.$$

1.6.3 In cazul unei serii de forma (numită *serie de puteri*)

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots$$

există $0\leq R\leq\infty$ numit *raza de convergenţă* astfel încât seria este convergentă în intervalul (x_0-R,x_0+R) şi divergentă în $(-\infty,x_0-R)\cup(x_0+R,\infty)$.

1.6.4 Dacă o funcţie f admite în vecinatatea unui punct x_0 o dezvoltare în serie de puteri de forma

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots$$

şi dacă această serie poate fi derivată termen cu termen de oricâte ori, atunci plecând de la relaţia dată şi de la derivatele ei

$$\begin{aligned} &f'(x)=a_1+2\,a_2(x-x_0)+3\,a_3(x-x_0)^2+4\,a_4(x-x_0)^3+\cdots \\ &f''(x)=2\,a_2+3\cdot 2\,a_3(x-x_0)^2+4\cdot 3\,a_4(x-x_0)^2+\cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

obţinem

$$a_0=f(x_0), \qquad a_1=f'(x_0), \qquad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}, \qquad \ldots$$

adică

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \text{oricare ar fi} \quad n\in\{0,1,2,\ldots\}$$

şi prin urmare,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

1.6.5 In cazul unei funcţii indefinit derivabile f putem defini seria de puteri

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

pentru fiecare punct x_0 din domeniul ei de definiţie.

1.7 Spaţii cu produs scalar

1.7.1 Definiţie. Prin *produs scalar* pe un spaţiu vectorial real V se înţelege o aplicaţie

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

a) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in V$ şi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \qquad \forall x, y \in V$

c) $\langle x, x \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in V$ şi
$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

1.7.2 Exemplu. Pe spaţiul vectorial real

$$\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \}$$

unde

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

relaţia

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

defineşte un produs scalar. Numărul

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

adică

$$||(x_1, x_2)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

reprezintă *lungimea* vectorului $x = (x_1, x_2)$.

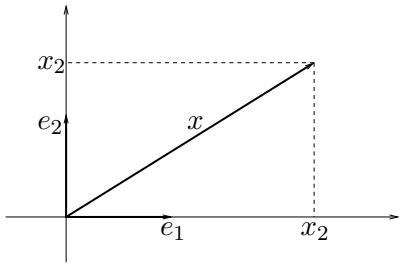

Figura 1.6: Lungimea vectorului $x=(x_1, x_2)$ din $\mathbb{R}^2$.

1.7.3 Utilizând formula

$$\cos(a-b) = \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b$$

obtinem relaţia (a se vedea figura 1.7)

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = ||x||\, ||y||\, (\cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b) = ||x||\, ||y||\, \cos(a-b)$$

din care rezultă că produsul scalar $\langle x, y\rangle$ a doi vectori x şi y este egal cu produsul lungimilor vectorilor înmulţit cu cosinusul unghiului dintre ei. In particular, vectorii sunt *ortogonali* (perpendiculari) dacă şi numai dacă

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

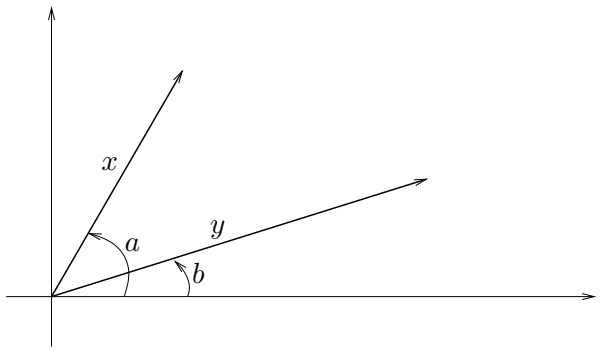

Figura 1.7: Produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^2$.

1.7.4 Definiţie. Prin *produs scalar* pe un spaţiu vectorial complex V se înţelege o aplicaţie

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

astfel încât

$a)$ $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in V$ şi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$b)$ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \qquad \forall x, y \in V$

$c)$ $\langle x, x \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in V$ şi
$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

1.7.5 Exemplu. Pe spaţiul vectorial complex

$$\mathbb{C}^2 = \{ x = (x_1, x_2) \mid \ x_1, x_2 \in \mathbb{C} \ \}$$

unde

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

relaţia

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 \, y_1 + \bar{x}_2 \, y_2$$

defineşte un produs scalar. Numărul

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

adică

$$||(x_1, x_2)|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$$

reprezintă *lungimea* vectorului $x = (x_1, x_2)$.

1.7.6 Definiţie. Un vector u este numit *vector unitar* (sau *versor*) dacă $||u|| = 1$.
Vectorul unitar corespunzător vectorului nenul x este vectorul

$$u = \frac{x}{||x||}$$

obţinut prin normarea lui x.

1.7.7 Propoziţie. *Proiecţia ortogonală a lui x pe $v \neq 0$ este*

$$\mathcal{P}_v x = \frac{\langle v, x \rangle}{\langle v, v \rangle} \, v.$$

Demonstraţie Proiecţia ortogonală a lui x pe v este un vector de forma λv. Impunând condiţia $(x - \lambda v) \perp v$, obţinem relaţia $\langle v, x - \lambda v \rangle = 0$ care conduce la $\lambda = \langle v, x \rangle / \langle v, v \rangle$.

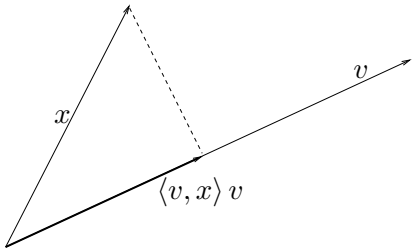

Figura 1.8: Proiecţia ortogonală lui x pe vectorul unitar v.

1.7.8 Proiecţia ortogonală a vectorului $x=(1,2,3)$ pe $v=(1,1,1)$ este

$$\mathcal{P}_{(1,1,1)}(1,2,3) = \frac{\langle(1,1,1),(1,2,3)\rangle}{\langle(1,1,1),(1,1,1)\rangle}\,(1,1,1) = (2,2,2).$$

1.7.9 MATHEMATICA: `Projection[x, v]`

`In[1]:=Projection[{1, 2, 3}, {1, 1, 1}]` $\mapsto$ Out[1]=(2,2,2)

1.7.10 Dacă u este un vector unitar, adică dacă $||u|| = 1$, atunci (vezi Fig. 1.8)

$$\mathcal{P}_u x = \langle u, x\rangle\, u.$$

1.7.11 Definiţie. O bază $\{e_1, e_2, ..., e_N\}$ a lui V este numită *bază ortonormată* dacă

$$\langle e_n, e_k\rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n = k \\ 0 & \text{dacă} \quad n \neq k. \end{cases}$$

1.7.12 Teoremă. *Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_N\}$ este bază ortonormată atunci orice vector $x \in V$ admite reprezentarea*

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n$$

adică, x este suma proiecţiilor pe vectorii bazei.

Demonstraţie. Vectorul x se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectorii bazei

$$x = \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \cdots + \alpha_N\, e_N$$

şi

$$\begin{aligned}
\langle e_1, x\rangle &= \langle e_1, \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \cdots + \alpha_N\, e_N\rangle \\
&= \alpha_1\langle e_1, e_1\rangle + \alpha_2\langle e_1, e_2\rangle + \cdots + \alpha_N\langle e_1, e_N\rangle = \alpha_1 \\
\langle e_2, x\rangle &= \langle e_2, \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \cdots + \alpha_N\, e_N\rangle \\
&= \alpha_1\langle e_2, e_1\rangle + \alpha_2\langle e_2, e_2\rangle + \cdots + \alpha_N\langle e_2, e_N\rangle = \alpha_2 \\
&\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\langle e_N, x\rangle &= \langle e_N, \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \cdots + \alpha_N\, e_N\rangle \\
&= \alpha_1\langle e_N, e_1\rangle + \alpha_2\langle e_N, e_2\rangle + \cdots + \alpha_N\langle e_N, e_N\rangle = \alpha_N.
\end{aligned}$$

1.7.13 Exemplu. Sistemul $\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) &= x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1e_1 + x_2e_2 \\
&= \langle(1,0),(x_1,x_2)\rangle e_1 + \langle(0,1),(x_1,x_2)\rangle e_2 \\
&= \langle e_1, x\rangle e_1 + \langle e_2, x\rangle e_2.
\end{aligned}$$

1.7.14 Exerciţiu. Să se arate că $\left\{e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$ şi să se scrie vectorul $x=(2,3)$ ca o combinaţie liniară de e_1' şi e_2'.

Rezolvare. Avem

$$\langle e_1', e_1'\rangle = \langle e_2', e_2'\rangle = 1, \qquad \langle e_1', e_2'\rangle = \langle e_2', e_1'\rangle = 0$$

şi

$$x = \langle e_1', x\rangle e_1' + \langle e_2', x\rangle e_2' = \tfrac{5}{\sqrt{2}} e_1' - \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_2'.$$

Capitolul 2

Serii Fourier

2.1 Exemple

2.1.1 Definiţie. Un sistem de vectori dintr-un spaţiu vectorial cu produs scalar

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ ...$$

este numit *sistem ortonormat* dacă

$$\langle v_n, v_k \rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n = k \\ 0 & \text{dacă} \quad n \neq k. \end{cases}$$

2.1.2 Pe spaţiul vectorial complex

$$C^0[-\pi, \pi] = \{\, \varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ \varphi \text{ este funcţie continuă } \}$$

unde

$$(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t), \qquad (\alpha\varphi)(t) = \alpha\ \varphi(t)$$

relaţia

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi(t)}\, \psi(t)\, dt$$

defineşte un produs scalar.

2.1.3 Exerciţiu. Să se arate că sistemul infinit de funcţii

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \cos 3t,\ \sin 3t, ... \tag{2.1}$$

din $C^0[-\pi, \pi]$ este un sistem ortonormat.

Rezolvare. Avem

$$\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, dt = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1$$

$$\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sin nt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \sin nt\, dt = -\tfrac{1}{n\pi\sqrt{2}} \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos nt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cos nt\, dt = \tfrac{1}{n\pi\sqrt{2}} \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle \cos nt, \cos nt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\, dt = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nt) dt = 1$$

$$\langle \sin nt, \sin nt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt\, dt = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nt) dt = 1$$

$$\langle \cos nt, \sin nt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin nt\, dt = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nt\, dt = 0$$

oricare ar fi n. Pentru $n \neq k$ obţinem

$$\langle \cos nt, \cos kt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt\, dt = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+k)t + \cos(n-k)t) dt = 0$$

$$\langle \sin nt, \sin kt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt\, dt = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-k)t - \cos(n+k)t) dt = 0$$

$$\langle \sin nt, \cos kt \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos kt\, dt = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+k)t + \sin(n-k)t) dt = 0.$$

2.1.4 Definiţie. Un *polinom trigonometric* este o combinaţie liniară finită de

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \cos 3t,\ \sin 3t, ...$$

adică o expresie de forma

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

O *serie Fourier trigonometrică* este o serie de funcţii de forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

unde coeficienţii a_n, b_n sunt numere complexe fixate.

2.1.5 Exerciţiu. Să se arate că

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt \\ a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t\, dt \\ b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt \end{cases}$$

şi în general,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt\, dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt\, dt. \end{cases}$$

Rezolvare. Avem

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}a_0+a_1\cos t+b_1\sin t\Big)\,dt=a_0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\cos t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}a_0+a_1\cos t+b_1\sin t\Big)\cos t\,dt=a_1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\sin t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}a_0+a_1\cos t+b_1\sin t\Big)\sin t\,dt=b_1.$$

2.1.6 Dacă seria este convergentă şi poate fi derivată termen cu termen atunci

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\cos nt\,dt\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\sin nt\,dt.\end{cases}$$

2.1.7 Definiţie. Fiecărei funcţii periodice $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ cu perioada 2π pentru care coeficienţii

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\cos nt\,dt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\sin nt\,dt$$

există i se asociază seria

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\tag{2.2}$$

numită *seria Fourier* (trigonometrică) a lui φ.

2.1.8 Dacă notăm funcţiile din şirul (2.1) cu e_0, e_1, e_2, ... atunci

$$\langle e_n,e_k\rangle=\delta_{nk}$$

coeficienţii seriei Fourier verifică relaţiile

$$a_0=\langle e_0,\varphi\rangle,\quad a_1=\langle e_1,\varphi\rangle,\quad b_1=\langle e_2,\varphi\rangle,\quad a_2=\langle e_3,\varphi\rangle,\quad b_2=\langle e_4,\varphi\rangle,\quad ...$$

iar seria Fourier (2.2) se poate scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle e_n,\varphi\rangle\,e_n.$$

2.1.9 In funcţie de anumite particularităţi ale lui φ, se poate ca:

- seria Fourier asociată să fie divergentă,
- seria Fourier asociată să fie convergentă dar suma ei să nu coincidă cu φ,
- seria Fourier asociată să fie convergentă şi suma ei să coincidă cu φ.

2.1.10 Dacă φ ia doar valori reale atunci coeficienţii a_n şi b_n sunt numere reale. In general, coeficienţii a_n şi b_n sunt numere complexe.

2.1.11 Dacă se modifică valorile funcţiei φ într-un număr finit de puncte, atunci valorile coeficienţilor a_n, b_n şi seria Fourier asociată nu se schimbă.

2.1.12 In cazul în care seria (2.2) este convergentă, relaţia

$$S(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

defineşte o funcţie $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ periodică cu perioada 2π.
Pentru ca o funcţie să coincidă cu suma seriei Fourier
asociate trebuie ca ea să fie periodică cu perioada 2π.

2.1.13 Funcţiile de forma $\varphi : [-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{C}$ pot fi identificate cu funcţiile periodice $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada 2π (obţinute folosind prelungirea prin periodicitate).

2.1.14 Fie φ este o funcţie periodică cu perioada 2π. Oricare ar fi $t_0 \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, \cos kt\, dt &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{t_0} \varphi(t)\, \cos kt\, dt + \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{t_0}^{\pi} \varphi(t)\, \cos kt\, dt \\
&= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{t_0} \varphi(t+2\pi)\, \cos k(t+2\pi)\, dt + \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{t_0}^{\pi} \varphi(t)\, \cos kt\, dt \\
&= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{\pi}^{t_0+2\pi} \varphi(t)\, \cos kt\, dt + \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{t_0}^{\pi} \varphi(t)\, \cos kt\, dt \\
&= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t)\, \cos kt\, dt.
\end{aligned}$$

Coeficienţii Fourier pot fi calculaţi integrând pe orice interval de lungime 2π

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t)\, \cos nt\, dt \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t)\, \sin nt\, dt \end{aligned} \qquad \text{oricare ar fi} \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

2.1.15

Seria Fourier asociată unei functii pare este de forma $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$.

Seria Fourier asociată unei functii pare este de forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$.

2.1.16 **Exerciţiu** (Seria Fourier a funcţiei "dinţi de fierăstrău" (vezi Fig. 2.1)).
Să se arate că seria Fourier asociată funcţiei periodice cu perioada 2π şi

$$\varphi(t) = t \qquad \text{pentru} \quad t \in [-\pi, \pi)$$

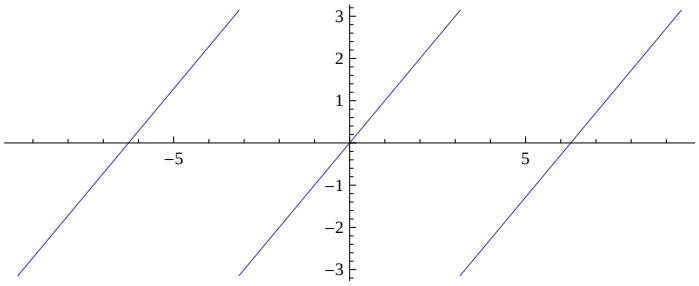

Figura 2.1: Funcţia "dinţi de fierăstrău".

este

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{2}{n}\,\sin nt. \tag{2.3}$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părţi şi relaţia $\cos n\pi=(-1)^n$ obţinem

$$a_n=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,\cos nt\,dt=\tfrac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t(\sin nt)'dt=\tfrac{1}{n\pi}\,t\,\sin nt\Big|_{-\pi}^{\pi}-\tfrac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt=0$$

$$b_n=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,\sin nt\,dt=-\tfrac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t(\cos nt)'dt=-\tfrac{1}{n\pi}\,t\,\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi}+\tfrac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt$$

$$=-\tfrac{1}{n\pi}\left[\pi\cos n\pi-(-\pi)\cos(-n\pi)\right]=-\tfrac{2\pi}{n\pi}\,\cos n\pi=-\tfrac{2}{n}\,(-1)^n=(-1)^{n-1}\,\tfrac{2}{n}.$$

2.1.17 MATHEMATICA: `FourierTrigSeries[f[t], t, k]`

`In[1]=FourierTrigSeries[t, t, 4]` $\mapsto$ Out[1]=2 Sin[t]−Sin[2 t]+$\frac{2}{3}$ Sin[3 t]−$\frac{1}{2}$ Sin[4 t]

2.1.18 Se poate arăta (vezi ....) că seria (2.3) este convergentă şi suma ei este

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{2}{n}\,\sin nt=\begin{cases}0 & \text{dacă}\quad t\in\mathbb{Z}\pi\\ \varphi(t) & \text{dacă}\quad t\notin\mathbb{Z}\pi.\end{cases}$$

Funcţia φ este continuă exceptând punctele $t\in\mathbb{Z}\pi=\{\,k\pi\mid\ k\in\mathbb{Z}\,\}$.
Se observă că suma seriei Fourier asociate coincide cu φ doar în punctele în care aceasta este continuă. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{2}{n}=0$$

contribuţiile termenilor devin din ce in ce mai mici pe măsură ce n creşte.
In Fig. 2.2 şi Fig. 2.3 prezentăm sumele parţiale

$$S_5(t)=\sum_{n=1}^{5}(-1)^{n-1}\,\frac{2}{n}\,\sin nt\qquad\text{şi}\qquad S_{10}(t)=\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n-1}\,\frac{2}{n}.$$

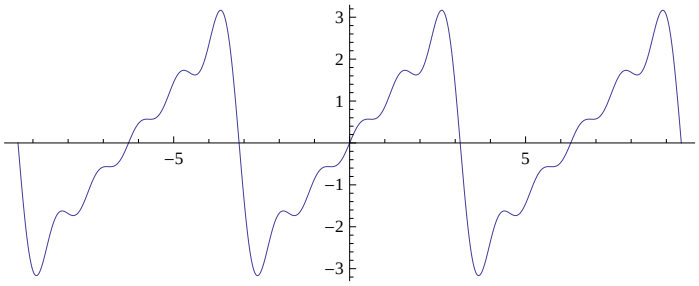

Figura 2.2: Suma parţială $S_5(t)$.

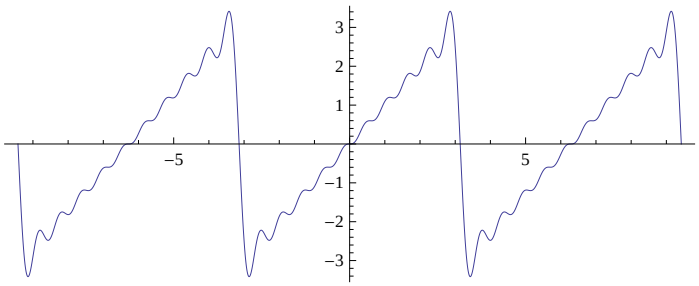

Figura 2.3: Suma parţială $S_{10}(t)$.

2.1.19 Exerciţiu. Să se arate că seria Fourier asociată funcţiei

$$\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = |t|$$

este

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t. \tag{2.4}$$

Rezolvare. Avem

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |t|\, dt = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t\, dt = \pi$$

iar pentru $n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_n = \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt\, dt = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt\, dt = \tfrac{2}{n\pi} \left[t \sin nt \big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nt\, dt \right] \\ = \tfrac{2}{n^2\pi} \cos nt \Big|_0^{\pi} = \tfrac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

$$b_n = \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin nt\, dt = 0 \qquad \text{(funcţie impară)}.$$

Funcţia obţinută prelungind φ prin periodicitate este o funcţie continuă deoarece $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$. Din teorema fundamentală (vezi pag. **??-??**) rezultă că seria (2.4)

este convergentă şi suma ei coincide cu φ, adică

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.1.20 MATHEMATICA: `FourierTrigSeries[f[t], t, k]`

`In[1]=FourierTrigSeries[Abs[t], t, 2]` $\mapsto$ Out[1]$=\frac{\pi}{2}-\frac{4\,\mathrm{Cos[t]}}{\pi}$

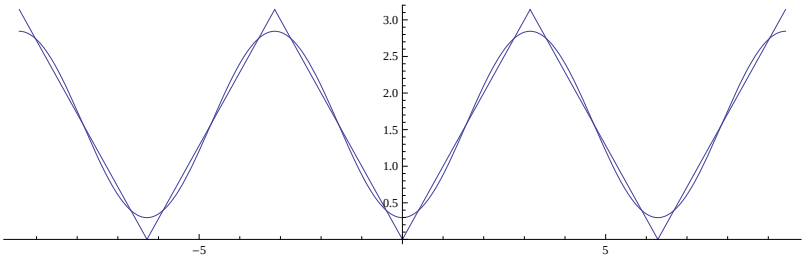

Figura 2.4: Prelungirea periodică a funcţiei $|t|$ şi o sumă Fourier parţială.

2.1.21 Exerciţiu. Să se arate că seria Fourier asociată funcţiei

$$\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = t^2$$

este

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt. \tag{2.5}$$

Rezolvare. Avem

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \tfrac{2\pi^2}{3}$$

iar pentru $n \neq 0$

$$a_n = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = \tfrac{2}{n\pi}\left[t^2\sin nt\big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} t\sin nt\,dt\right]$$
$$= -\tfrac{4}{n\pi}\textstyle\int_0^{\pi} t\sin nt\,dt = \tfrac{4}{n\pi}\left[t\cos nt\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nt\,dt\right] = \tfrac{4}{n^2}(-1)^n$$
$$b_n = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin nt\,dt = 0 \qquad \text{(funcţie impară)}.$$

Funcţia obţinută prelungind φ prin periodicitate este o funcţie continuă deoarece $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$. Din teorema fundamentală (vezi pag. **??-??**) rezultă că seria (2.5) este convergentă şi suma ei coincide cu φ, adică

$$\varphi(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.1.22 **MATHEMATICA:** `FourierTrigSeries[f[t], t, k]`

```
In[1]=FourierTrigSeries[t^2, t, 2]  ↦  Out[1]=π^2/3+4(-Cos[t]+1/4 Cos[2 t])
```

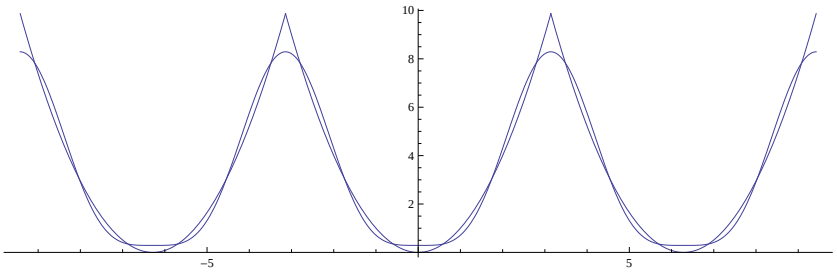

Figura 2.5: Prelungirea periodică a funcţiei t^2 şi o sumă Fourier parţială.

2.1.23 In cazul în care coeficienţii a_n şi b_n sunt numere reale, relaţia

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\, \cos(nt + \phi_n) \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \tan \phi_n = -\frac{b_n}{a_n} & \text{dacă} \quad a_n \neq 0 \\ \phi_n = -\frac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad a_n = 0 \end{cases}$$

ne permite să scriem seria Fourier asociată unei funcţii sub forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\, \cos(nt + \phi_n)$$

unde $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ reprezintă *amplitudinea* armonicei de ordinul n iar ϕ_n *faza iniţială*.

2.1.24 Fie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

seria Fourier asociată unei funcţii periodice $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada 2π.

Utilizând formulele

$$\cos nt = \frac{\mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int}}{2} \qquad \text{şi} \qquad \sin nt = \frac{\mathrm{e}^{int} - \mathrm{e}^{-int}}{2\mathrm{i}}$$

obţinem

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) &= \tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{2}+b_n\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{2\mathrm{i}}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}(a_n-\mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}+\tfrac{1}{2}(a_n+\mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right)\\ &= c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}+c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}c_0 &= \tfrac{1}{2}a_0=\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt\\ c_n &= \tfrac{1}{2}(a_n-\mathrm{i}b_n)=\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}dt\\ c_{-n} &= \tfrac{1}{2}(a_n+\mathrm{i}b_n)=\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}dt\end{aligned}$$

adică

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}dt \qquad \text{oricare ar fi} \quad n\in\mathbb{Z}.$$

2.1.25 Şirul de funcţii periodice cu perioada 2π

$$\ldots,\ \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t},\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},\ 0,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t},\ \mathrm{e}^{3\mathrm{i}t},\ \ldots$$

este ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi(t)}\,\psi(t)\,dt.$$

2.1.26 Definiţie. Fiecărei funcţii periodice $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ cu perioada 2π pentru care coeficienţii

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}dt$$

există i se asociază seria

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \tag{2.6}$$

numită *seria Fourier complexă* a lui φ.

2.1.27 Exerciţiu. Seria Fourier complexă a funcţiei "dinţi de fierăstrău" este

$$\sum_{n\neq0}(-1)^n\,\frac{\mathrm{i}}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}. \tag{2.7}$$

Rezolvare. Prin calcul direct, pentru $n\neq0$, obţinem

$$c_n = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}dt = -\tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}n}\int_{-\pi}^{\pi} t\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})'\,dt = -\tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}n}\left[t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,dt\right]$$
$$= -\tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}n}\left[\pi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} + \pi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} + \tfrac{1}{\mathrm{i}n}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi})\right]$$
$$= -\tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}n}\left[2\pi\,\cos n\pi - \tfrac{2}{n}\sin n\pi\right] = \tfrac{\mathrm{i}}{n}\,\cos n\pi = \tfrac{\mathrm{i}}{n}(-1)^n.$$

2.1.28 **MATHEMATICA:** `FourierSeries[f[t], t, k]`

`In[1]=FourierSeries[t, t, 2]` $\mapsto$ Out[1]$=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$

2.1.29 Rezultatele prezentate pot fi uşor extinse la funcţii periodice cu perioada T. Şirul de funcţii

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\omega_0 t,\ \sin\omega_0 t,\ \cos 2\omega_0 t,\ \sin 2\omega_0 t,\ \cos 3\omega_0 t,\ \sin 3\omega_0 t, \ldots \qquad (2.8)$$

unde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

este un sistem ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{\varphi(t)}\,\psi(t)\,dt$$

şi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\,\cos n\omega_0 t\,dt \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\,\sin n\omega_0 t\,dt. \end{cases}$$

Seria Fourier asociată unei funcţii periodice φ cu perioada T este

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t) \quad \text{cu} \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\,\cos n\omega_0 t\,dt \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\,\sin n\omega_0 t\,dt \end{cases}$$

iar seria Fourier complexă este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} \qquad \text{cu} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}dt.$$

Coeficienţii Fourier pot fi calculaţi integrând pe orice interval de lungime T

$$a_n = \tfrac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\varphi(t)\,\cos\omega_0 nt\,dt$$
$$b_n = \tfrac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\varphi(t)\,\sin\omega_0 nt\,dt \qquad \text{oricare ar fi} \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$
$$c_n = \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}dt$$

2.1.30 *Cazul* $T = 1$. Şirul de funcţii

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t,\ \cos 4\pi t,\ \sin 4\pi t,\ \cos 6\pi t,\ \sin 6\pi t, ... \tag{2.9}$$

este un sistem ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \overline{\varphi(t)}\, \psi(t)\, dt.$$

Seria Fourier asociată unei funcţii periodice φ cu perioada $T = 1$ este

$$\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt) \quad \text{cu} \quad \begin{cases} a_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t)\, \cos n\omega_0 t\, dt \\ b_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t)\, \sin n\omega_0 t\, dt \end{cases}$$

iar seria Fourier complexă este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt} \qquad \text{cu} \qquad c_n = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} nt} dt.$$

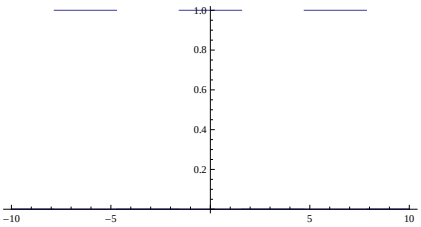

Figura 2.6: Funcţia dreptunghiulară periodică în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi$.

2.1.31 Exerciţiu (Seria Fourier a *funcţiei dreptunghiulare periodice* (vezi Fig. 2.6)). Fie $0 \le a \le T$. Să se arate că seria Fourier complexă asociată funcţiei periodice $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T şi astfel încât

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad -T/2 \le t \le -a/2 \\ 1 & \text{pentru} \quad -a/2 \le t \le a/2 \\ 0 & \text{pentru} \quad a/2 \le t \le T/2 \end{cases}$$

este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\omega_0 t}. \tag{2.10}$$

Rezolvare. Avem

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} 1\,dt = \frac{a}{T}$$

iar pentru $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}dt = -\frac{1}{\mathrm{i}n\omega_0 T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{2}{n\omega_0 T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 a/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 a/2}}{2\mathrm{i}} = \frac{2}{T}\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0}.$$

2.1.32 Coeficienţii c_n sunt valorile funcţiei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{2\sin(ax/2)}{Tx}$$

in punctele $n\omega_0$ cu $n \in \mathbb{Z}$ (vezi Fig. 2.7).

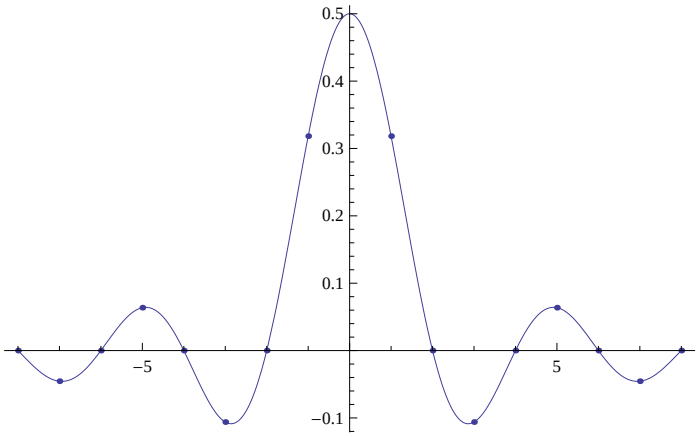

Figura 2.7: Coeficienţii c_n şi graficul funcţiei f în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi$.

2.1.33 Deoarece

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{2}{T}\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0} = 0$$

contribuţiile termenilor devin din ce în ce mai mici pe măsură ce $|n|$ creşte. In Fig. 2.8 şi Fig. 2.9 prezentăm sumele parţiale

$$S_5(t) = \sum_{n=-5}^{5} \frac{2}{T}\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} \quad \text{şi} \quad S_{10}(t) = \sum_{n=-10}^{10} \frac{2}{T}\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}$$

în cazul $T = 2\pi$ şi $a = \pi$.

2.1.34 Exerciţiu (Seria Fourier a *funcţiei triunghiulare periodice* (vezi Fig. 2.10)). Fie $0 < a \leq T/2$. Să se arate că seria Fourier complexă asociată

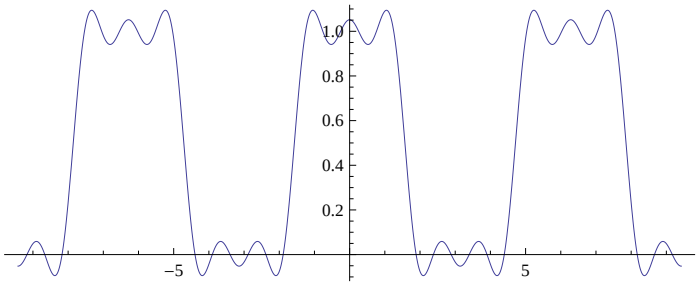

Figura 2.8: Suma parţială $S_5(t)$.

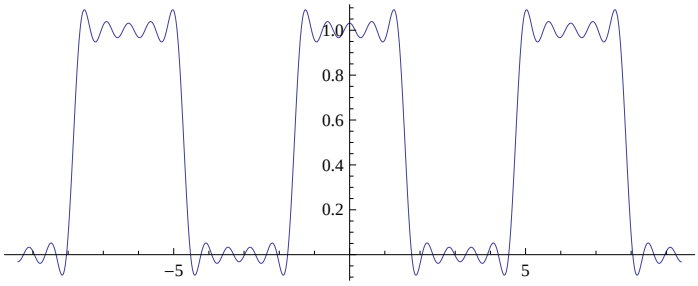

Figura 2.9: Suma parţială $S_{10}(t)$.

funcţiei periodice $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T şi astfel încât

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad -T/2 \leq t < -a \\ 1 + \frac{t}{a} & \text{pentru} \quad -a \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{a} & \text{pentru} \quad 0 < t \leq a \\ 0 & \text{pentru} \quad a < t \leq T/2 \end{cases}$$

este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2\omega_0^2 aT}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}. \tag{2.11}$$

Rezolvare. Avem

$$c_0 = \tfrac{1}{T}\int_{-a}^{0}\left(1+\tfrac{t}{a}\right)\,dt + \tfrac{1}{T}\int_{0}^{a}\left(1-\tfrac{t}{a}\right)\,dt = \tfrac{a}{T}$$

iar pentru $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \tfrac{1}{T}\int_{-a}^{0}\left(1+\tfrac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,dt + \tfrac{1}{T}\int_{0}^{a}\left(1-\tfrac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{T}\int_{0}^{a}\left(1-\tfrac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}\,dt + \tfrac{1}{T}\int_{0}^{a}\left(1-\tfrac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,dt \\ &= \tfrac{2}{T}\int_{0}^{a}\left(1-\tfrac{t}{a}\right)\cos n\omega_0 t\,dt \\ &= \tfrac{2}{T}\tfrac{1}{n\omega_0}\left[\left(1-\tfrac{t}{a}\right)\sin n\omega_0 t\Big|_0^a + \tfrac{1}{a}\int_0^a \sin n\omega_0 t\,dt\right] \\ &= \tfrac{2}{Tn\omega_0}\tfrac{1}{a}\tfrac{-1}{n\omega_0}\cos n\omega_0 t\Big|_0^a = \tfrac{2(1-\cos n\omega_0 a)}{n^2\omega_0^2 aT} = \tfrac{4\sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2\omega_0^2 aT} \end{aligned}$$

Funcţia φ este continuă. Din teorema fundamentală (vezi pag. **??-??**) rezultă că seria (2.11) este convergentă şi suma ei coincide cu φ

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2\omega_0^2 aT}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} \qquad \text{oricare ar fi} \quad t\in\mathbb{R}.$$

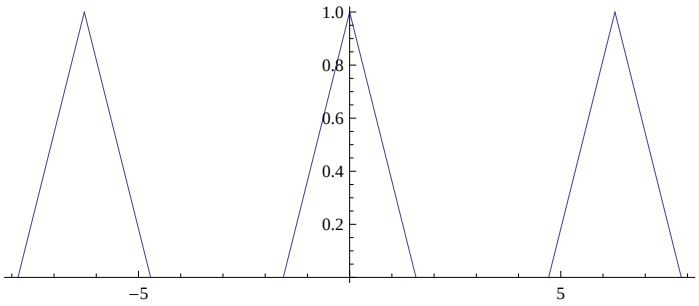

Figura 2.10: Funcţia triunghiulară periodică în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi/2$.

2.1.35 Coeficienţii c_n sunt valorile funcţiei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{4\sin^2(ax/2)}{aTx^2}$$

în punctele $n\omega_0$ cu $n\in\mathbb{Z}$ (vezi Fig. 2.11).

2.1.36 Deoarece

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{4\sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2\omega_0^2 aT} = 0$$

contribuţiile termenilor devin din ce în ce mai mici pe măsură ce $|n|$ creşte. In Fig. 2.12 şi Fig. 2.13 prezentăm sumele parţiale

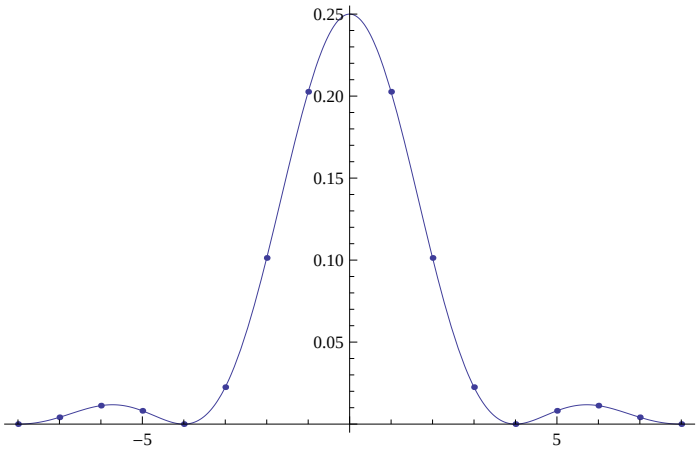

Figura 2.11: Coeficienţii c_n şi graficul funcţiei f în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi/2$.

$S_3(t) = \sum_{n=-3}^{3} \frac{4\sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2\omega_0^2 aT} \, \mathrm{e}^{in\omega_0 t}$ şi $S_5(t) = \sum_{n=-5}^{5} \frac{4\sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2\omega_0^2 aT} \, \mathrm{e}^{in\omega_0 t}$

în cazul $T = 2\pi$ şi $a = \pi/2$.

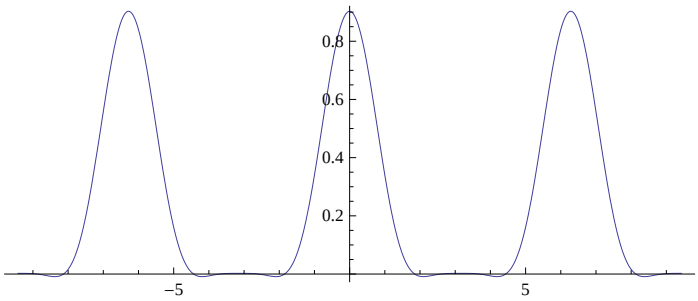

Figura 2.12: Suma parţială $S_3(t)$.

2.1.37 Plecând de la orice funcţie continuă pe porţiuni

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

putem considera restricţia ei la un subinterval $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, iar apoi putem extinde acestă restricţie la $\mathbb{R}$ prin periodicitate cu perioada $T = \beta - \alpha$. Seria Fourier corespunzătoare funcţiei periodice astfel obţinute poate fi

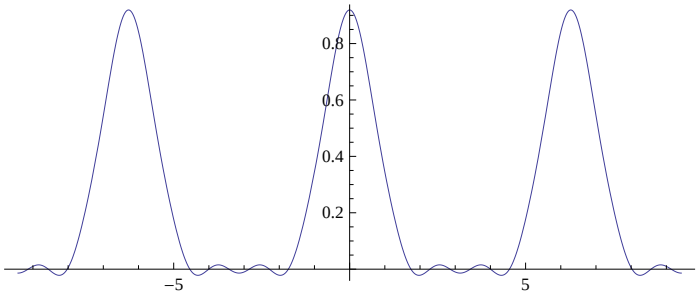

Figura 2.13: Suma parţială $S_5(t)$.

determinată utilizând formulele prezentate la pag. 40-**29**. In Fig. 2.14 prezentăm prelungirea prin periodicitate (perioada $T = 3$) a restricţiei funcţiei $f(t) = t^2$ la intervalul $[-1, 2]$ şi o sumă parţială a seriei Fourier.

2.1.38 MATHEMATICA:

```
In[1]=  f[t_] := t^2
        alpha = -1; beta = 2; number = 10; T = beta - alpha
        Plot[f[t], {t, alpha , beta}, AspectRatio  -> 0.7]
        Show[{Plot[f[t], {t, alpha , beta}],
        Plot[f[t - T], {t, alpha + T, beta + T}],
        Plot[f[t + T], {t, alpha - T, beta - T}]}, PlotRange -> All ,
        AspectRatio  -> 0.3]
        a[n_] := (2/T) Integrate[f[t] Cos[2 Pi n t/T], {t, alpha, beta}]
        b[n_] := (2/T) Integrate[f[t] Sin[2 Pi n t/T], {t, alpha, beta}]
        Phi[t_] = a[0]/2 + Sum[
        a[n] Cos[2 Pi n t /T] + b[n] Sin[2 Pi n t/T], {n, 1, number}]
        Plot[Phi[t], {t, alpha - T, beta + T}, AspectRatio  -> 0.3]
```

2.1.39 Seria Fourier asociată unei funcţii de două variabile

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

periodică cu perioadele $(2\pi, 0)$ şi $(0, 2\pi)$

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha+2\pi, \beta) = \varphi(\alpha, \beta+2\pi) \qquad \text{oricare ar fi} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\beta}$$

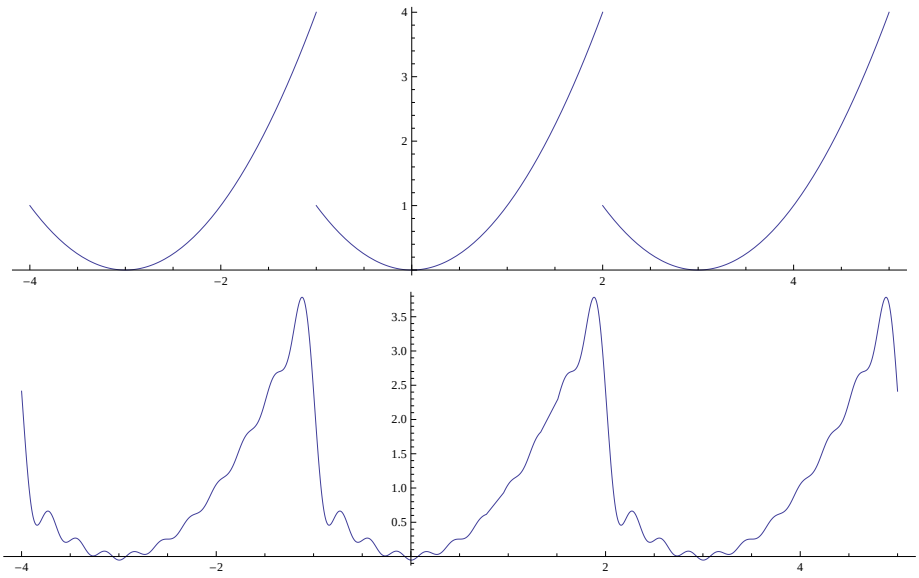

Figura 2.14: Restricţia funcţiei $f(t) = t^2$ la $[-1, 2]$ extinsă prin periodicitate şi o sumă Fourier parţială.

unde

$$c_{n,m} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{-\pi}^{\pi} d\beta \, \varphi(\alpha, y) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\alpha} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\beta}$$

sau echivalent

$$c_{n,m} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{0}^{2\pi} d\alpha \int_{0}^{2\pi} d\beta \, \varphi(\alpha, \beta) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\alpha} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\beta}.$$

2.1.40 MATHEMATICA:

```
In[1]=Plot3D[x^2 y, {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}]
     Plot3D[FourierSeries[x^2 y, {x, y}, {2, 2}], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}]
     Plot3D[FourierSeries[x^2 y, {x, y}, {2, 2}], {x, -3 Pi, 3 Pi}, {y, -3 Pi, 3 Pi}]
```

2.1.41 Seria Fourier asociată unei funcţii de două variabile

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

periodică cu perioadele $(T_1, 0)$ şi $(0, T_2)$

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha + T_1, \beta) = \varphi(\alpha, \beta + T_2) \qquad \text{oricare ar fi} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_1}n\alpha}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_2}m\beta}$$

unde

$$c_{n,m} = \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1} d\alpha \int_0^{T_2} d\beta\, \varphi(\alpha,\beta)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_1}n\alpha}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_2}m\beta}.$$

2.1.42 Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ doi vectori liniar independenţi şi $T_1, T_2 \in (0,\infty)$.
Unei funcţii periodice

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele T_1a_1 şi T_2a_2

$$\psi(x) = \psi(x + T_1a_1) = \psi(x + T_2a_a) \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in \mathbb{R}^2$$

îi putem asocia funcţia periodică

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \tilde{\psi}(x_1, x_2) = \psi(x_1a_1 + x_2a_2)$$

cu perioadele $(T_1, 0)$ şi $(0, T_2)$. Seria Fourier asociată funcţiei $\tilde{\psi}$ este

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} c_{k_1,k_2}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_1}k_1x_1}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_2}k_2x_2} \tag{2.12}$$

unde

$$c_{k_1,k_2} = \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1} dx_1 \int_0^{T_2} dx_2\, \tilde{\psi}(x_1,x_2)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_1}k_1x_1}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T_2}k_2x_2}. \tag{2.13}$$

2.1.43 In $\mathbb{R}^2$, unei baze

$$\{a_1 = (\alpha_1, \beta_1),\, a_2 = (\alpha_2, \beta_2)\}$$

îi putem asocia baza

$$\left\{ b_1 = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1},\, \frac{-\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \right),\, b_2 = \left(\frac{-\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1},\, \frac{\alpha_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \right) \right\}$$

cu proprietatea

$$\langle b_i, a_j \rangle = \delta_{ij} \tag{2.14}$$

numită *reciproca bazei* $\{a_1, a_2\}$. Din relaţia (2.14) rezultă

$$\langle k_1b_1 + k_2b_2,\, x_1a_1 + x_2a_2 \rangle = k_1x_1 + k_2x_2.$$

2.1.44 Exerciţiu. Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ doi vectori liniar independenţi şi $T_1, T_2 \in (0, \infty)$. Să se determine $k \in \mathbb{R}^2$ astfel încât funcţia

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k, x\rangle}$$

să fie periodică cu perioadele $T_1 a_1$ şi $T_2 a_2$.

Rezolvare. Căutăm k de forma

$$k = q_1 b_1 + q_2 b_2$$

unde $\{b_1, b_2\}$ este reciproca bazei $\{a_1, a_2\}$. Pentru a avea

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k, x\rangle} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k, x + T_1 a_1\rangle} \qquad \text{şi} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k, x\rangle} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k, x + T_2 a_2\rangle}$$

este necesar şi suficient ca

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1 T_1} = 1 \qquad \text{şi} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2 T_2} = 1$$

adică să aibă loc relaţiile

$$q_1 T_1 \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{şi} \qquad q_2 T_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

care se mai pot scrie

$$q_1 \in \tfrac{2\pi}{T_1}\mathbb{Z} \qquad \text{şi} \qquad q_2 \in \tfrac{2\pi}{T_2}\mathbb{Z}.$$

Funcţia φ este periodică cu perioadele $T_1 a_1$ şi $T_2 a_2$ dacă şi numai dacă

$$k \in \frac{2\pi}{T_1}\mathbb{Z} b_1 + \frac{2\pi}{T_2}\mathbb{Z} b_2$$

adică dacă şi numai dacă este de forma

$$\varphi(x_1 a_1 + x_2 a_2) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{T_1} k_1 x_1 + \frac{2\pi\mathrm{i}}{T_2} k_2 x_2} \qquad \text{cu} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

2.1.45 Utilizând notaţiile

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 = (\alpha, \beta) \qquad \text{şi} \qquad \mathcal{R}^* = \frac{2\pi}{T_1}\mathbb{Z} b_1 + \frac{2\pi}{T_2}\mathbb{Z} b_2$$

seria Fourier (2.12) se poate scrie sub forma

$$\sum_{k \in \mathcal{R}^*} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k, x\rangle}$$

iar formula (2.13) pentru calculul coeficienţilor sub forma

$$c_k = \frac{1}{\text{aria}(\mathcal{C})} \iint_{\mathcal{C}} d\alpha\, d\beta\, \psi(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle k,x\rangle}$$

unde $\mathcal{C}$ este paralelogramul determinat de vectorii $T_1 a_1$ şi $T_2 a_2$.

2.2 Aplicaţii

2.2.1

2.3 Definiţii şi rezultate fundamentale

2.3.1 Teoremă. *Dacă seria*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

este uniform convergentă şi dacă suma ei este funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *atunci*

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad \textit{oricare ar fi} \quad n \in \{0,1,2,...\} \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad \textit{oricare ar fi} \quad n \in \{1,2,3,...\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

şi are loc egalitatea lui Parseval

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{2.16}$$

Demonstraţie. Fie $s_k(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$. Deoarece

$$|s_k(x)\cos nx - f(x)\cos nx| = |\cos nx| \cdot |s_k(x) - f(x)| \le |s_k(x) - f(x)|$$

obţinem (a se vedea pag. **??-??**)

$$s_k \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f \implies s_k \cos nx \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f\cos nx \implies \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Dar conform proprietăţii de ortogonalitate (pag. **??-??**) avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi a_n, \qquad \text{pentru orice} \quad k \ge n.$$

Funcţia periodică f cu perioada 2π fiind limita unui şir uniform convergent de funcţii continue este continuă şi deci mărginită. La fel ca mai sus, $s_k \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f \Longrightarrow s_k\, f \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f^2$ şi

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\, f(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\tfrac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) f(x)\,dx\right] \\ &= \lim_{k\to\infty} \pi\left[\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)\right] = \pi\left[\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right].\end{aligned}$$

2.3.2 Propoziţie. *Dacă $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni şi*

$$t_n:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad t_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

un polinom trigonometric de gradul n atunci cea mai mică valoare a integralei

$$\delta_n^2=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-t_n(x)]^2dx \tag{2.17}$$

se obţine în cazul în care α_k şi β_k sunt coeficienţii Fourier (2.15) asociaţi funcţiei f.

Demonstraţie. Utilizând relaţiile (**??**) şi (2.15) obţinem

$$\begin{aligned}\delta_n^2 &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,t_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} t_n^2(x)\,dx \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \alpha_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - 2\sum_{k=1}^{n}\Big[\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \\ &\qquad\qquad +\beta_k\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\Big] + \pi\left[\tfrac{1}{2}\alpha_0^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right] \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_0^2-2a_0\alpha_0)+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2-2\alpha_k a_k-2\beta_k b_k)\right] \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\tfrac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right] \\ &\qquad\qquad +\pi\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]\right\}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.3.3 Teoremă. *Dacă $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni şi dacă a_n, b_n sunt coeficienţii Fourier asociaţi funcţiei f atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ este convergentă şi are loc* inegalitatea lui Bessel

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Demonstraţie. In cazul în care $\alpha_k=a_k$ şi $\beta_k=b_k$, din (2.17) şi (2.18) rezultă

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right] = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-t_n(x)]^2dx \geq 0$$

şi

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right] \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

2.3.4 Propoziţie. *Dacă $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni atunci coeficienţii Fourier a_n, b_n asociaţi funcţiei f au proprietatea*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă din convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ şi din

$$0 \leq |a_n| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2}, \qquad 0 \leq |b_n| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

2.3.5 Dacă se modifică valorile luate de o funcţie continuă pe porţiuni într-un număr finit de puncte, funcţia rezultată rămâne continuă pe porţiuni. Are sens să se pună problema dacă o funcţie $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este sau nu continuă pe porţiuni chiar dacă există un număr finit de puncte din $[-\pi,\pi]$ în care ea nu este definită.

2.3.6 Teoremă. *Dacă $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, derivabilă exceptând eventual un număr finit de puncte, cu derivata f' continuă pe porţiuni şi astfel încât $f(-\pi)=f(\pi)$ atunci seria Fourier asociată lui f este convergentă şi suma ei este f*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx] = f(x), \qquad \textit{oricare ar fi } \; x\in[-\pi,\pi].$$

Demonstraţie. A se vedea [**?**], pag 120.

2.3.7 Fie $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe porţiuni. Dacă modificăm valorile pe care le ia f într-un număr finit de puncte din $[-\pi,\pi]$ seria Fourier asociată nu se modifică. Fără a restrânge generalitatea, vom considera doar funcţii cu proprietatea $f(-\pi)=f(\pi)$. Orice astfel de funcţie este restricţia la $[-\pi,\pi]$ a unei funcţii $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ periodice cu perioada 2π (pentru care am păstrat aceeaşi notaţie).

2.3.8 Teoremă. *Dacă $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, derivabilă în intervalele de continuitate şi cu derivata f' continuă pe porţiuni atunci seria Fourier asociată lui f este convergentă în orice punct şi*

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]=\frac{f(x-)+f(x+)}{2},\qquad oricare\ ar\ fi\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Demonstraţie. A se vedea [**?**], pag 118.

2.3.9 Dacă funcţia f este continuă în punctul x atunci $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}=f(x)$.

2.3.10 Teoremă (A doua teoremă de aproximare a lui Weierstrass).
Orice funcţie continuă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π este limita unui şir uniform convergent de polinoame trigonometrice.

Demonstraţie. A se vedea [**?**], vol.2, pag 119.

2.3.11 Aplicaţia

$$\varphi:[-\pi,\pi]\longrightarrow[a,b],\qquad \varphi(t)=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\pi}t$$

este bijectivă şi inversa ei este

$$\varphi^{-1}:[a,b]\longrightarrow[-\pi,\pi],\qquad \varphi^{-1}(x)=\frac{\pi}{b-a}(2x-a-b).$$

Fiecare funcţie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ cu $f(a)=f(b)$ se poate prelungi prin periodicitate cu perioada $(b-a)$ până la o funcţie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ şi $f=(f\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}$, unde

$$f\circ\varphi:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad (f\circ\varphi)(t)=f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\pi}t\right)$$

este o funcţie periodică cu perioada 2π. Seria Fourier corespunzătoare lui $f\circ\varphi$ este

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nt+b_n\sin nt] \tag{2.19}$$

unde

$$a_n=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{b-a}{2\pi}t\right)\cos nt\,dx=\tfrac{2}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f(x)\cos\tfrac{n\pi}{b-a}(2x-a-b)dx$$

$$b_n=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{b-a}{2\pi}t\right)\sin nt\,dx=\tfrac{2}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f(x)\sin\tfrac{n\pi}{b-a}(2x-a-b)dx$$

Deoarece $f=(f\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}$ efectuând în (2.19) substituţia $t=\frac{\pi}{b-a}(2x-a-b)$ obţinem seria Fourier corespunzătoare lui f

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b)+b_n\sin\frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b)\right].$$

2.3.12 Notaţie. Vom scrie

$$\varphi(t) \leftrightarrow c_n \qquad \text{în loc de} \qquad \textit{coeficienţii Fourier ai funcţiei } \varphi(t) \textit{ sunt } c_n.$$

2.3.13 Teoremă. *Avem*

$$\begin{matrix} \varphi(t) \leftrightarrow \varphi_n \\ \psi(t) \leftrightarrow \psi_n \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) \leftrightarrow \alpha\varphi_n + \beta\psi_n.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din relaţia

$$\int_{-T/2}^{T/2} (\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t)) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} dt = \alpha \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} dt + \beta \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} dt.$$

2.3.14 Teoremă. *Avem*

$$\varphi(t) \leftrightarrow c_n \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \overline{\varphi(t)} & \leftrightarrow & \overline{c_{-n}} \\ \varphi(t - t_0) & \leftrightarrow & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t_0} c_n \\ \varphi(-t) & \leftrightarrow & c_{-n} \end{matrix}$$

Capitolul 3

Transformarea Fourier discretă

3.1 Definiţie şi exemple

3.1.1 Definiţie. Spunem despre o funcţie de variabilă discretă

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

că este *periodică* cu perioada N dacă

$$\varphi(n+N) = \varphi(n) \qquad \text{oricare ar fi} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3.1.2 Oricare ar fi $k \in \{0, 1, ..., N-1\}$, funcţia exponenţială

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} : \ n \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}$$

este o funcţie periodică cu perioada N deoarece

$$\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k(n+N)} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \, \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}.$$

Am utilizat relaţia

$$\mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}} = \cos 2k\pi + \mathrm{i} \sin 2k\pi = 1.$$

3.1.3 Orice funcţie

$$\varphi : \{0, 1, ..., N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate prelungi prin periodicitate până la o funcţie periodică

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada N şi orice funcţie periodică $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada N este complet determinată de restricţia ei la mulţimea $\{0, 1, ..., N-1\}$, adică de numerele $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ... $\varphi(N-1)$. Deoarece

$$... = \varphi(n-2N) = \varphi(n-N) = \varphi(n) = \varphi(n+N) = \varphi(n+2N) = ...$$

funcţia φ poate fi considerată ca fiind definită pe mulţimea $\mathbb{Z}_N$ a claselor de resturi modulo N pentru care $\{0, 1, ..., N-1\}$ este un sistem de reprezentanţi, adică putem considera că

$$\varphi : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}.$$

3.1.4 Teoremă. *Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ este funcţie periodică cu perioada N atunci*

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m) \\ \varphi(n) &= \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstraţie. Din formula (suma seriei geometrice)

$$\sum_{m=0}^{N-1} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad q = 1 \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{dacă} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

rezultă relaţia

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} m(n-k)} = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} (n-k)} \right)^m = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad k \equiv n \,(\text{modulo}\, N) \\ 0 & \text{dacă} \quad k \not\equiv n \,(\text{modulo}\, N) \end{cases}$$

care conduce la

$$\tfrac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nm} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} mk} \varphi(k) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} m(n-k)} \right) \varphi(k) = \varphi(n).$$

3.1.5 Ştim că orice funcţie periodică continuă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in \mathbb{R}$$

netedă pe porţiuni este dezvoltabilă în serie Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T} kt} \qquad \text{cu} \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T} kt} \, f(t) \, dt. \tag{3.2}$$

Din (3.1) rezultă că $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ periodică cu perioada N admite reprezentarea

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \qquad \text{cu} \qquad c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m). \tag{3.3}$$

3.1.6 Definiţie. *Transformata Fourier* a funcţiei periodice

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada N este funcţia

$$F[\varphi] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n). \tag{3.4}$$

Transformata Fourier inversă a lui φ este funcţia

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n). \tag{3.5}$$

3.1.7 Alte *definiţii alternative* utilizate în literatură sunt

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n) \qquad \text{cu} \quad F^{-1}[\varphi](k) = \tfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n)$$
$$F[\varphi](k) = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n) \quad \text{cu} \quad F^{-1}[\varphi](k) = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n).$$

3.1.8 Transformatele Fourier $F[\varphi]$ şi $F^{-1}[\varphi]$ sunt funcţii periodice cu perioada N

$$F[\varphi](k+N) = F[\varphi](k), \qquad F^{-1}[\varphi](k+N) = F^{-1}[\varphi](k)$$

şi din teorema prezentată la pag. 56-**4** rezultă că

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi, \qquad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

3.1.9 In cazul $N = 2$, transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2} kn} \varphi(n) = \sum_{n=0}^{1} (-1)^{kn} \varphi(n)$$

adică avem

$$F[\varphi](0) = \varphi(0) + \varphi(1)$$
$$F[\varphi](1) = \varphi(0) - \varphi(1).$$

3.1.10 In cazul $N=3$ avem

$$e^{-\frac{2\pi i}{3}kn} = \left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^{kn} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad kn \in 3\mathbb{Z} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{dacă} \quad kn \in 3\mathbb{Z}+1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{dacă} \quad kn \in 3\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

şi prin urmare transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1,2\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0,1,2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{2} e^{-\frac{2\pi i}{3}kn}\varphi(n)$$

adică avem

$$\begin{aligned} F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) \\ F[\varphi](1) &= \varphi(0) + \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(1) + \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(2) \\ F[\varphi](2) &= \varphi(0) + \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(1) - \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(2). \end{aligned}$$

Ultimele relaţii se mai pot scrie

$$\begin{pmatrix} F[\varphi](0) \\ F[\varphi](1) \\ F[\varphi](2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix}.$$

3.1.11 In cazul $N=4$, transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{3} e^{-\frac{2\pi i}{4}kn}\varphi(n) = \sum_{n=0}^{3} (-i)^{kn}\varphi(n)$$

adică avem

$$\begin{aligned} F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) \\ F[\varphi](1) &= \varphi(0) - i\varphi(1) - \varphi(2) + i\varphi(3) \\ F[\varphi](2) &= \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(2) - \varphi(3) \\ F[\varphi](3) &= \varphi(0) + i\varphi(1) - \varphi(2) - i\varphi(3). \end{aligned}$$

3.1.12 In relaţiile (3.4) şi (3.5) putem considera că n parcurge mulţimea $\mathbb{Z}_N$ a claselor de resturi modulo N. Astfel, transformata Fourier a funcţiei

$$\varphi : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}\varphi(n)$$

iar transformata Fourier inversă a lui φ este funcţia

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}\varphi(n).$$

De exemplu, în cazul în care $N = 2M+1$ este impar, mulţimea

$$\{-M, -M+1, ..., M-1, M\}$$

este sistem de reprezentanţi pentru $\mathbb{Z}_N$ şi prin urmare

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=-M}^{M} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}\varphi(n) \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N}\sum_{n=-M}^{M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}\varphi(n).$$

In acest caz relaţiile (3.1) devin

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m\in\mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km}\varphi(m) \\ \varphi(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m\in\mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km}\varphi(m). \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1.13 Funcţia φ poate fi aproximată utilizând funcţii de forma

$$\varphi_L(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=-L}^{L} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m\in\mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km}\varphi(m) \tag{3.7}$$

cu $L \in \{1, 2, ...\}$ ales astfel încât $2L+1 < N$. Dacă φ este funcţie reală atunci utilizând schimbarea $k \mapsto -k$ obţinem relaţia

$$\begin{aligned} \varphi_L(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=-L}^{L} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m\in\mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km}\varphi(m) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=-L}^{L} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m\in\mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km}\varphi(m) = \overline{\varphi_L(n)} \end{aligned}$$

care arată că φ_L este funcţie reală. In figura 3.1 prezentăm funcţia periodică

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu perioada $N=20$ definită prin

$$\varphi(n) = (n/10)^2 \qquad \text{pentru} \quad -10 \le n \le 9$$

şi funcţia periodică

$$\varphi_3 = \frac{1}{20} \sum_{k=-3}^{3} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{20} nk} \sum_{m=-10}^{9} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{20} km} \varphi(m).$$

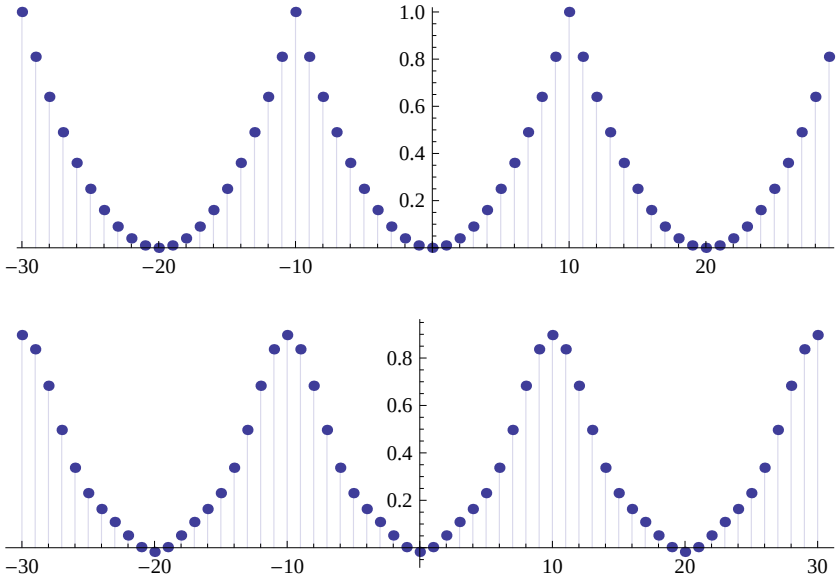

Figura 3.1: Funcţiile φ şi φ_3.

3.1.14 Spaţiul funcţiilor periodice $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada N se poate identifica cu $\mathbb{C}^N$ asociind funcţiei φ elementul $(x_0, ..., x_{N-1}) = (\varphi(0), ..., \varphi(N-1)) \in \mathbb{C}^N$. Transformarea Fourier poate fi considerată ca fiind operatorul liniar

$$F : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N : x = (x_0, x_1, ..., x_{N-1}) \mapsto F[x] = (F[x]_0, F[x]_1, ..., F[x]_{N-1})$$

unde

$$F[x]_k = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} x_n.$$

Transformarea inversă este

$$F^{-1}[x]_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} x_n.$$

3.1.15 Exerciţiu. Fie $m \in \{0, 1, ..., N-1\}$ fixat şi *funcţia delta discretă*

$$\delta_m : \{0, 1, ..., N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n = m \\ 0 & \text{dacă} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Să se determine $F[\delta_m]$.

Rezolvare. Avem

$$F[\delta_{n_0}](k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \delta_m(n) = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km}.$$

In particular, scriind δ în loc de δ_0, avem

$$F[\delta](k) = 1,$$
$$F[\delta_1](k) = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k},$$
$$F[\delta_2](k) = \mathrm{e}^{-\frac{4\pi \mathrm{i}}{N} k}, \text{ etc.}$$

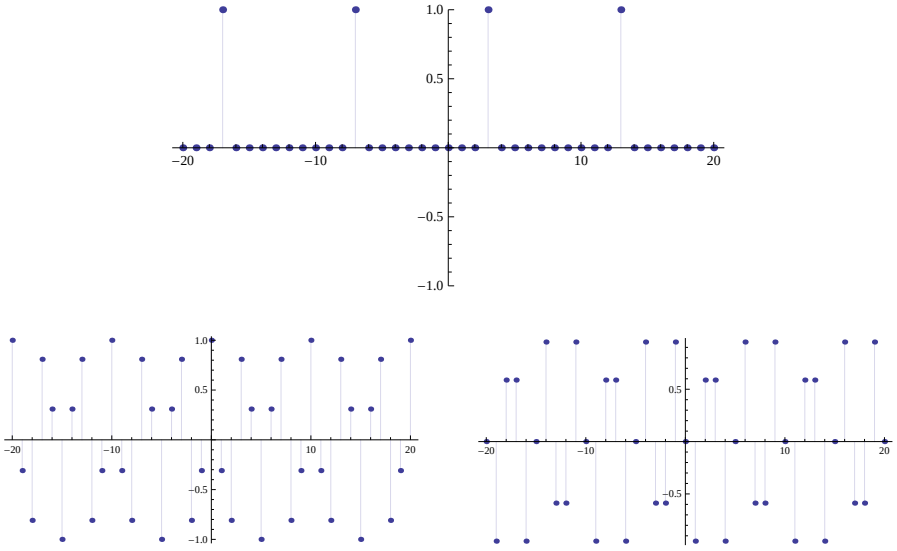

Figura 3.2: Funcţia δ_3, partea reală (stânga) şi partea imaginară a transformatei Fourier $F[\delta_3]$ în cazul $N = 10$.

3.1.16 Exerciţiu. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$\varphi : \{0, 1, ..., N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(n) = a^n$$

unde $a \in \mathbb{C}$ este fixat.

Rezolvare. Utilizând formula (suma progresiei geometrice)

$$\sum_{m=0}^{N-1} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad q = 1 \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{dacă} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

obţinem

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} a^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k} \right)^n = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad a = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k} \\ \frac{1-a^N}{1-a\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k}} & \text{dacă} \quad a \neq \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k}. \end{cases}$$

3.1.17 Exerciţiu. Fie funcţia

$$\varphi : \{0, 1, ..., N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(n) = C_{N-1}^n.$$

Să se calculeze $F[\varphi]$.

Rezolvare. Utilizând formula (binomul lui Newton)

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n\, a^{m-n} b^n$$

obţinem

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} C_{N-1}^n \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} = \left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k} \right)^{N-1}.$$

3.1.18 Dacă funcţia reală

$$\varphi : \{-M, -M+1, ..., M-1, M\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

este pară

$$\varphi(-n) = \varphi(n)$$

atunci, utilizând schimbarea $n \mapsto -n$, obţinem

$$\begin{aligned} F[\varphi](k) &= \sum_{n=-M}^{M} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n) = \sum_{n=-M}^{M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(-n) \\ &= \sum_{n=-M}^{M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n) = \overline{F[\varphi](k)} \end{aligned}$$

adică transformata Fourier $F[\varphi]$ este funcţie reală.

3.1.19 Mathematica + figure .....

3.2 Transformarea Fourier rapidă

3.2.1 Ştim că în cazul $N=2$, transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \begin{array}{l} F[\varphi](0) = \varphi(0) + \varphi(1) \\ F[\varphi](1) = \varphi(0) - \varphi(1). \end{array}$$

3.2.2 In cazul în care perioada este un număr par $2N$, unei funcţii

$$\varphi : \{0,1,...,2N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

îi putem asocia funcţiile

$$\begin{array}{ll} \varphi_{par} : \{0,1,...,N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi_{par}(n) = \varphi(2n) \\ \varphi_{impar} : \{0,1,...,N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi_{impar}(n) = \varphi(2n+1) \end{array}$$

şi avem

$$\begin{aligned} F[\varphi](k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2N} kn} \varphi(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2N} k\, 2m} \varphi(2m) + \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2N} k\,(2m+1)} \varphi(2m+1) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k\, m} \varphi_{par}(m) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{N} k} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k\, m} \varphi_{impar}(m) \\ &= \begin{cases} F[\varphi_{par}](k) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{N} k}\, F[\varphi_{impar}](k) & \text{dacă} \quad k \in \{0,1,...,N-1\} \\ F[\varphi_{par}](k-N) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{N} k}\, F[\varphi_{impar}](k-N) & \text{dacă} \quad k \in \{N, N+1, ..., 2N-1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizând formula obţinută, calculul transformatelor Fourier ale funcţiilor de forma

$$\varphi : \{0,1,...,2^N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate reduce succesiv până la calculul transformatelor unor funcţii de forma

$$\psi : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Această metodă de calcul foarte eficientă este numită *transformarea Fourier rapidă.*

3.2.3 Calculul transformatei Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate reduce la calculul transformatelor Fourier ale funcţiilor

$$\begin{aligned} &\varphi_{par} : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{par}(n) = \varphi(2n) \\ &\varphi_{impar} : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{impar}(n) = \varphi(2n+1) \end{aligned}$$

Avem

$$F[\varphi](k) = \begin{cases} F[\varphi_{par}](k) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{2} k} F[\varphi_{impar}](k) & \text{dacă} \quad k \in \{0,1\} \\ F[\varphi_{par}](k-2) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{2} k} F[\varphi_{impar}](k-2) & \text{dacă} \quad k \in \{2,3\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) & \text{dacă} \quad k=0 \\ \varphi(0) - \mathrm{i}\varphi(1) - \varphi(2) + \mathrm{i}\varphi(3) & \text{dacă} \quad k=1 \\ \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(2) - \varphi(3) & \text{dacă} \quad k=2 \\ \varphi(0) + \mathrm{i}\varphi(1) - \varphi(2) - \mathrm{i}\varphi(3) & \text{dacă} \quad k=3. \end{cases}$$

3.2.4 In cazul unei funcţii de forma

$$\varphi : \{0,1,2,...,2^3-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

funcţiilor

$$\begin{aligned} &\varphi_{par} : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{par}(n) = \varphi(2n) \\ &\varphi_{impar} : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{impar}(n) = \varphi(2n+1) \end{aligned}$$

li se poate aplica direct formula obţinută la punctul anterior.

3.3 Proprietăţi ale transformării Fourier

3.3.1

3.4 Funcţii proprii ale transformării Fourier

3.4.1 Pe parcursul acestei secţiuni vom utiliza pentru transformarea Fourier definiţia

$$F[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n) \qquad \text{cu} \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n).$$

3.5 Transformarea Fourier bidimensională

3.5.1 Fie $N_1, N_2 \in \{2,3,4,...\}$. Dacă $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$ atunci funcţia

$$\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(n_1,n_2) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2} \tag{3.8}$$

este o funcţie periodică cu perioadele $(N_1,0)$ şi $(0,N_2)$, adică

$$\varphi(n_1,n_2) = \varphi(n_1+N_1,n_2) = \varphi(n_1,n_2+N_2), \qquad \forall (n_1,n_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Dacă în (3.8) înlocuim k_1 cu k_1+N_1 sau k_2+N_2 atunci funcţia φ nu se schimbă. Dintre funcţiile (3.8) doar N_1N_2 sunt distincte şi ele pot fi descrise utilizând clase de resturi ca fiind cele corespunzătoare lui $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_{N_1}\times\mathbb{Z}_{N_2}$.
Un sistem de reprezentanţi pentru $\mathbb{Z}_{N_1}\times\mathbb{Z}_{N_2}$ este $\{0,...,N_1-1\}\times\{0,...,N_2-1\}$.

3.5.2 Funcţiile periodice

$$\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele $(N_1,0)$ şi $(0,N_2)$ se pot identifica cu funcţiile

$$\varphi : \{0,1,...,N_1-1\}\times\{0,1,...,N_2-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

iar în cazul în care $N_1 = 2M_1+1$ şi $N_2 = 2M_2+1$ sunt impare cu

$$\varphi : \{-M_1,-M_1+1,...,M_1\}\times\{-M_2,-M_2+1,...,M_2\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Din relaţia (3.9) rezultă că putem considera φ definită pe $\mathbb{Z}_{N_1}\times\mathbb{Z}_{N_2}$, adică

$$\varphi : \mathbb{Z}_{N_1}\times\mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

3.5.3 Teoremă.
Dacă $\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ *este periodică cu perioadele* $(N_1,0)$ *şi* $(0,N_2)$ *atunci*

$$\varphi(n_1,n_2) = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}n_1k_1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}n_2k_2}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1m_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2m_2}\varphi(m_1,m_2)$$

$$\varphi(n_1,n_2) = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}n_1k_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}n_2k_2}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1m_1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2m_2}\varphi(m_1,m_2).$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă direct din teorema prezentată la pag. 56-**4**.

3.5.4 Definiţie.

Transformata Fourier a funcţiei periodice

$$\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele $(N_1, 0)$ şi $(0, N_2)$ este funcţia

$$F[\varphi] : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2).$$

Transformata Fourier inversă a lui φ este funcţia

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F^{-1}[\varphi](k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2).$$

3.5.5 Transformatele Fourier ale funcţiilor periodice cu perioadele $(N_1, 0)$ şi $(0, N_2)$ sunt funcţii periodice cu aceleaşi perioade şi

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi \qquad \text{şi} \qquad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

Astfel, transformata Fourier a funcţiei

$$\varphi : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia $F[\varphi] : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin relaţia

$$F[\varphi](k_1, k_2) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2)$$

iar transformata Fourier inversă funcţia $F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$F^{-1}[\varphi](k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2).$$

3.5.6 Relaţiile din teorema prezentată la pag. 65-**3** permit reobţinerea exactă sau aproximativă a unei funcţii din transformata ei Fourier. In figura **??** prezentăm în diverse reprezentari grafice funcţiile

$$f, g : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \times \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definite prin

$$f(n_1, n_2) = \frac{|n_1 n_2|}{n_1^2 + n_2^2 + 1}$$

şi

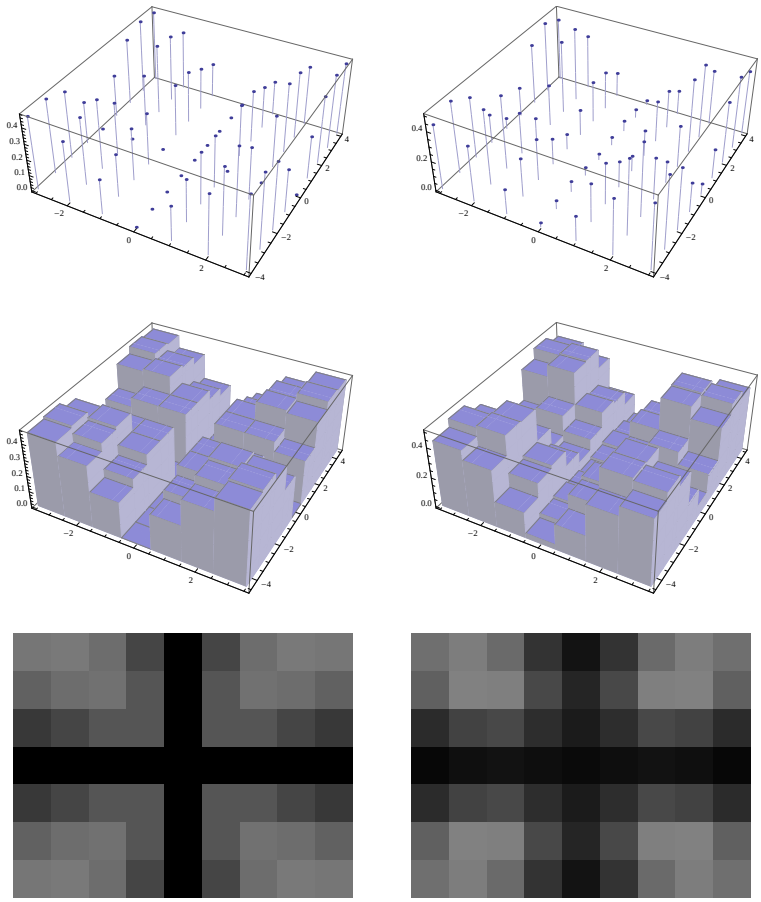

Figura 3.3: Funcţiile f (stânga) şi g (dreapta) în diverse reprezentări grafice.

$$g(n_1,n_2)=\frac{1}{12}\sum_{k_1=-2}^{2}\sum_{k_2=-2}^{2}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{7}n_1k_1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{9}n_2k_2}$$
$$\sum_{m_1=-3}^{3}\sum_{m_2=-4}^{4}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{7}k_1m_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{9}k_2m_2}f(m_1,m_2).$$

3.5.7 MATHEMATICA:

```
In[1]=  M1 = 3; M2 = 4; N1 = 2 M1 + 1; N2 = 2 M2 + 1
        f[n_, k_] := N[Abs[n k]/(n^2 + k^2 + 1)]
        Ff[n_, k_] :=  N[(1/(N1  N2)) Sum[Exp[2 Pi I a n/N1]
                         Exp[2 Pi I b k/N2] f[a, b], {a,-M1, M1}, {b,-M2, M2}]]
        g[n_, k_] :=  N[Re[Sum[Ff[a, b] Exp[-2 Pi I a n/N1]
                          Exp[-2 Pi I b k/N2], {a,-2,2}, {b,-2, 2}]]]
        DiscretePlot3D[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}]
        DiscretePlot3D[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}]
        DiscretePlot3D[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}, ExtentSize -> Full]
        DiscretePlot3D[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}, ExtentSize -> Full]
        Image[Table[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}] ]
        Image[Table[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}] ]
```

3.5.8 Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ doi vectori liniar independenţi, $N_1, N_2 \in \{2, 3, ...\}$ şi

$$\mathcal{R} = \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 = \{\, n_1a_1 + n_2a_2 \;\mid\; n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \,\}$$

reţeaua Bravais cu baza $\{a_1, a_2\}$. O funcţie periodică

$$\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele N_1a_1 şi N_2a_2 poate fi considerată ca fiind o funcţie

$$\varphi : \tilde{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe mulţimea cu N_1N_2 elemente

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}_{N_1}a_1 + \mathbb{Z}_{N_2}a_2.$$

Funcţiei φ îi putem asocia funcţia periodică

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \tilde{\varphi}(n_1, n_2) = \varphi(n_1a_1 + n_2a_2)$$

cu transformata Fourier $F[\tilde{\varphi}] : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$F[\tilde{\varphi}](k_1, k_2) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2} \tilde{\varphi}(n_1, n_2). \tag{3.10}$$

3.5.9 Dacă $\{b_1, b_2\}$ este reciproca bazei $\{a_1, a_2\}$ atunci

$$\left.\begin{array}{l} n = n_1a_1 + n_2a_2 \\ k = \frac{2\pi}{N_1} k_1b_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2b_2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \langle k, n\rangle = \tfrac{2\pi}{N_1} k_1n_1 + \tfrac{2\pi}{N_2} k_2n_2.$$

Ştim (vezi pag. 49-**44**) că funcţia

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k,x\rangle}$$

este periodică cu perioadele N_1a_1 şi N_2a_2 dacă şi numai dacă

$$k \in \tfrac{2\pi}{N_1}\mathbb{Z}b_1 + \tfrac{2\pi}{N_2}\mathbb{Z}b_2$$

adică dacă şi numai dacă este de forma

$$\varphi(x_1a_1 + x_2a_2) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1x_1 + \frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2x_2} \qquad \text{cu} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Din relaţia (3.10) rezultă că transformata Fourier a funcţiei

$$\varphi : \tilde{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate defini ca fiind funcţia

$$F[\varphi] : \tilde{\mathcal{R}}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n\in\tilde{\mathcal{R}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle k,n\rangle}\,\varphi(n)$$

definită pe mulţimea $\tilde{\mathcal{R}}^*$ cu N_1N_2 elemente

$$\tilde{\mathcal{R}}^* = \frac{2\pi}{N_1}\mathbb{Z}_{N_1}b_1 + \frac{2\pi}{N_2}\mathbb{Z}_{N_2}b_2.$$

care se poate obţine din reţeaua Bravais

$$\mathcal{R}^* = \frac{2\pi}{N_1}\mathbb{Z}b_1 + \frac{2\pi}{N_2}\mathbb{Z}b_2$$

identificând punctele $\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1b_1 + \frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2b_2$ şi $\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1'b_1 + \frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2'b_2$ în cazul în care $k_1 - k_1'$ este multiplu de N_1 şi $k_2 - k_2'$ este multiplu de N_2.

3.5.10 Două puncte ale planului (α_1, β_1) şi (α_2, β_2) sunt numite *echivalente* dacă $(\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2) \in 2\pi\mathbb{Z}b_1 + 2\pi\mathbb{Z}b_2$. Relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă care permite împărţirea mulţimii punctelor planului în clase de echivalenţă. *Celula elementară*

$$\{\, 2\pi\alpha b_1 + 2\pi\beta b_2 \;\mid\; \alpha, \beta \in [0, 1) \,\}$$

contine un reprezentant al fiecărei clase de echivalenţă şi numai unul.
Se ştie că mediatoarea unui segment AB este formată din toate punctele egal depărtate de A şi B. Mediatoarea împarte planul în două semiplane. Unul dintre ele conţine punctele mai apropiate de A iar celălalt punctele mai apropiate de B. In reţeaua Bravais $2\pi\mathbb{Z}b_1 + 2\pi\mathbb{Z}b_2$, ducând mediatoarele segmentelor ce unesc $(0, 0)$ cu puncte ale reţelei putem determina poligonul

$\mathcal{B}_0$ care conţine punctele mai apropiate de $(0,0)$ decât de oricare alt punct al reţelei. Adăugând mulţimii $\mathcal{B}_0$ anumite părţi ale frontierei sale se poate obţine o mulţime $\mathcal{B}$ care conţine un reprezentant al fiecărei clase de echivalenţă şi numai unul, numită *prima zonă Brillouin*.

3.5.11 Un sistem de reprezentanţi pentru elementele lui $\tilde{\mathcal{R}}^*$ este

$$\left\{ \frac{2\pi}{N_1}\, k_1 b_1 + \frac{2\pi}{N_2}\, k_2 b_2 \;\middle|\; k_1 \in \{0,1,...,N_1-1\},\ k_2 \in \{0,1,...,N_2-1\} \right\}.$$

Un alt sistem de reprezentanţi este

$$\mathcal{B} \cap \left(\tfrac{2\pi}{N_1}\mathbb{Z}b_1 + \tfrac{2\pi}{N_2}\mathbb{Z}b_2 \right)$$

adică mulţimea punctelor de forma $\frac{2\pi}{N_1}\, k_1 b_1 + \frac{2\pi}{N_2}\, k_2 b_2$ din prima zonă Brillouin.

3.6 Aplicaţii

3.6.1 *Eşantionare.*

3.6.2 **Teoremă** (Shannon)

3.7 Definiţii şi rezultate fundamentale

3.7.1 Ştim că orice funcţie periodică continuă

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada T

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in \mathbb{R}$$

netedă pe porţiuni este dezvoltabilă în serie Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T}\, nt} \tag{3.11}$$

cu

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T}\, nt}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T}\, nt}\, dt.$$

3.7.2 Relaţia (3.11) se mai poate scrie

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T}nt}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T}nt}\,dt = f(t). \tag{3.12}$$

3.7.3 In aplicaţii, funcţia f este determinată "experimental" şi se cunosc valorile doar in anumite puncte $t\in[0,T]$. Admiţând că ştim doar valorile

$$f(0),\quad f\left(\tfrac{T}{N}\right),\quad f\left(2\tfrac{T}{N}\right),\quad \ldots\quad f\left((N-1)\tfrac{T}{N}\right)$$

unde N este un întreg pozitiv fixat, putem aproxima integrala

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T}nt}\,dt$$

cu suma Riemann

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left((k+1)\tfrac{T}{N}-k\tfrac{T}{N}\right) f\left(k\tfrac{T}{N}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T}nk\frac{T}{N}} = \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}nk} f\left(k\tfrac{T}{N}\right).$$

Avem

$$c_n = \lim_{N\to\infty}\tfrac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}nk} f\left(k\tfrac{T}{N}\right)$$

dar pentru N fixat, aproximarea

$$c_n \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}nk} f\left(k\frac{T}{N}\right)$$

ar conduce la

$$c_{n+N} \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}(n+N)k} f\left(k\frac{T}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}nk} f\left(k\frac{T}{N}\right) \approx c_n$$

în contradicţie cu

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0.$$

3.7.4 Utilizând formula (suma seriei geometrice)

$$\sum_{m=0}^{N-1} q^m = 1+q+q^2+\cdots+q^{N-1} = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad q=1 \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{dacă} \quad q\neq 1 \end{cases}$$

obţinem însă relaţia

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}nm}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}mk} f\left(k\frac{T}{N}\right) = f\left(n\frac{T}{N}\right) \tag{3.13}$$

oricare ar fi $n\in\{0,1,2,...,N-1\}$. Intr-adevăr,

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}m(n-k)}=\sum_{m=0}^{N-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}(n-k)}\right)^m=\begin{cases}N & \text{dacă} \quad k=n\\ 0 & \text{dacă} \quad k\neq n.\end{cases}$$

şi prin urmare

$$\tfrac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}nm}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}mk}f\left(k\tfrac{T}{N}\right)=\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}m(n-k)}\right)f\left(k\tfrac{T}{N}\right)=f\left(n\tfrac{T}{N}\right).$$

3.7.5 O funcţie $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}$ periodică cu perioada N este complet determinată de restricţia ei la mulţimea $\{0,1,...,N-1\}$, adică de

$$(\varphi(0),\varphi(1),...,\varphi(N-1))\in\mathbb{C}^N.$$

Invers, $(x_0,x_1,...,x_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ corespunde funcţiei periodice $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}$ cu

$$\varphi(0)=x_0,\quad \varphi(1)=x_1,\quad ...\quad \varphi(N-1)=x_{N-1}.$$

Spaţiul funcţiilor $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ periodice cu perioada N se poate identifica cu $\mathbb{C}^N$.

3.7.6 Teoremă. *Fie $d\in\{2,3,...\}$. Transformarea Fourier finită*

$$F:\mathbb{C}^d\longrightarrow\mathbb{C}^d:(x_0,x_1,...,x_{d-1})\mapsto(y_0,y_1,...,y_{d-1}),\quad y_k=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=0}^{d-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}x_n$$

este unitară şi inversa ei este

$$F^{-1}:\mathbb{C}^d\longrightarrow\mathbb{C}^d:(y_0,y_1,...,y_{d-1})\mapsto(x_0,x_1,...,x_{d-1}),\quad x_n=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=0}^{d-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}y_k.$$

Demonstraţie. Matricea în raport cu baza canonică

$$F=\frac{1}{\sqrt{d}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}2} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}(d-1)}\\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}2} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}4} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}2(d-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}(d-1)} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}2(d-1)} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}(d-1)^2}\end{pmatrix}$$

este o matrice unitară deoarece

$$\frac{1}{d}\sum_{n=0}^{d-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}mn}=\frac{1}{d}\sum_{n=0}^{d-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}(k-m)n}=\delta_{km}=\begin{cases}1 & \text{dacă} \quad k=m \text{ (modulo } d)\\ 0 & \text{dacă} \quad k\neq m \text{ (modulo } d).\end{cases}$$

3.7.7 In cazul unui spaţiu Hilbert d-dimensional este convenabil uneori sa indexăm coordonatele folosind inelul $\mathbb{Z}_d$ al claselor de resturi modulo d. Deoarece

$$\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}(k+jd)n} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}k(n+jd)}$$

oricare ar fi $j\in\mathbb{Z}$, au sens relaţiile

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn} x_n, \qquad x_n = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn} y_k.$$

3.7.8 Orice spaţiu Hilbert d-dimensional V poate fi identificat cu $\mathbb{C}^d$ alegand o bază ortonormată $\{|v_n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}_d}$. Spaţiul V poate fi astfel identificat cu spaţiul funcţiilor de forma $\varphi : \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{C}$. Transformările Fourier directă şi inversă se pot scrie

$$F = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k,n\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn} |v_k\rangle\langle v_n|, \qquad F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k,n\in\mathbb{Z}_d} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn} |v_k\rangle\langle v_n| = F^*.$$

3.7.9 Deoarece $F^4 = \mathbb{I}$ valorile proprii ale lui F aparţin mulţimii $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

3.7.10* Se ştie (a se vedea pag. 86-**13**) că pentru transformarea Fourier continuă

$$\varphi \mapsto \mathcal{F}[\varphi], \qquad \text{unde} \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,dx$$

funcţia

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = H_k(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

definită cu ajutorul polinomului Hermite H_k, este funcţie proprie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} H_k(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \mathrm{i}^k\,H_k(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

3.7.11* Folosind funcţia periodică

$$F_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+x)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+x)\right)^2}$$

cu perioada d definim funcţia

$$\mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R} : n \mapsto F_k(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+n)\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+n)\right)^2}$$

adică,

$$\mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R} : n \mapsto F_k(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+n)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}(\alpha d+n)^2}$$

unde $\mathbb{Z}_d = \{0, 1, ..., d-1\}$ este mulţimea întregilor modulo d.

3.7.12* Teoremă [**?**]. *Pentru orice* $k\in\{0,1,2,...\}$, *funcţia*

$$\mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R}:\ n\mapsto F_k(n)=\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+n)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}(\alpha d+n)^2}$$

este funcţie proprie a transformării Fourier finite

$$\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=0}^{d-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}jn}F_k(n)=\mathrm{i}^k F_k(j)\qquad \textit{oricare ar } fi\ \ j\in\mathbb{Z}_d.$$

Demonstraţie. Funcţia periodică $F_k(x)$ admite dezvoltarea Fourier

$$F_k(x)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\ell x}$$

cu coeficienţii

$$\begin{aligned} a_\ell &= \tfrac{1}{d}\textstyle\int_0^d \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\ell x}F_k(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{d}\textstyle\int_0^d \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\ell x}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+x)\right)^2}H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+x)\right)\,dx \end{aligned}$$

Notând $t=\sqrt{\frac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+x)$ şi utilizând formulele $H_k(-x)=(-1)^kH_k(x)$ şi

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha\sqrt{2\pi d}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi d}} g(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

obţinem

$$\begin{aligned} a_\ell &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi d}}\textstyle\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha\sqrt{2\pi d}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi d}}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\ell\left(t\sqrt{\frac{d}{2\pi}}-\alpha d\right)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,H_k(t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi d}}\textstyle\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha\sqrt{2\pi d}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi d}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell t\sqrt{\frac{2\pi}{d}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,H_k(t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{d}}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell t\sqrt{\frac{2\pi}{d}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,H_k(t)\,dt \\ &= \tfrac{\mathrm{i}^k}{\sqrt{d}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}\ell^2}\,H_k\left(-\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\right) \\ &= \tfrac{(-\mathrm{i})^k}{\sqrt{d}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}\ell^2}\,H_k\left(\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\right) \end{aligned}$$

de unde

$$F_k(x)=\textstyle\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}a_\ell\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\ell x}=\frac{(-\mathrm{i})^k}{\sqrt{d}}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\ell x}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}\ell^2}\,H_k\left(\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\right)$$

Din relaţia

$$\begin{aligned} F_k(j) &= \tfrac{(-\mathrm{i})^k}{\sqrt{d}} \textstyle\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d} j\ell}\, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}\ell^2}\, H_k\left(\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\right) \\ &= (-\mathrm{i})^k\, \tfrac{1}{\sqrt{d}} \textstyle\sum_{n=0}^{d-1} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d} j(\alpha d+n)}\, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}(\alpha d+n)^2}\, H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+n)\right) \\ &= (-\mathrm{i})^k\, \tfrac{1}{\sqrt{d}} \textstyle\sum_{n=0}^{d-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d} jn} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{d}(\alpha d+n)^2}\, H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{d}}\,(\alpha d+n)\right) \\ &= (-\mathrm{i})^k\, \tfrac{1}{\sqrt{d}} \textstyle\sum_{n=0}^{d-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d} jn} F_k(n) \end{aligned}$$

dedusă utilizând egalitatea

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g(\ell) = \sum_{n=0}^{d-1} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} g(\alpha d+n)$$

obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d} jn} F_k(n) = \mathrm{i}^k F_k(j) \qquad \text{oricare ar fi } \ j \in \mathbb{Z}_d.$$

3.7.13 Dintre funcţiile proprii $F_k : \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R}$ cel mult d pot fi liniar independente.

3.7.14* Funcţia lui Jacobi θ_3 definită prin relaţia [**?**, **?**]

$$\theta_3(z,\tau) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau\alpha^2}\, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha z}, \qquad \mathfrak{Im}\,(\tau) > 0$$

este importantă pentru fizica teoretică datorită proprietăţilor ei, dintre care menţionăm

$$\begin{aligned} \theta_3(z+m+n\tau,\tau) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\tau n^2}\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nz}\, \theta_3(z,\tau) \\ \theta_3(z,\mathrm{i}\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp^{-\frac{\pi z^2}{\tau}} \theta_3\left(\frac{z}{\mathrm{i}\tau}, \frac{\mathrm{i}}{\tau}\right). \end{aligned}$$

3.7.15* Oricare ar fi $\kappa \in (0,\infty)$, se poate arăta [**?**, **?**] că

$$\theta_3\left(\frac{k}{d}, \frac{\mathrm{i}\kappa}{d}\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa d}} \sum_{n=0}^{d-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}\, \theta_3\left(\frac{n}{d}, \frac{\mathrm{i}}{\kappa d}\right).$$

Din această relaţie rezultă că funcţiile (vezi Figura 3.4)

$$\mathbf{g}_\kappa : \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathbf{g}_\kappa(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\kappa\pi}{d}(\alpha d+n)^2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa d}}\, \theta_3\left(\frac{n}{d}, \frac{\mathrm{i}}{\kappa d}\right)$$

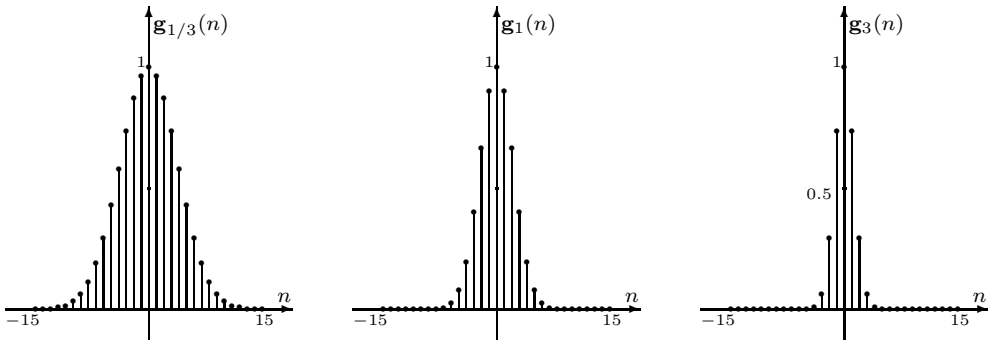

Figura 3.4: The functions $\mathbf{g}_{1/3}$, $\mathbf{g}_1$ şi $\mathbf{g}_3$ în cazul $d = 31$.

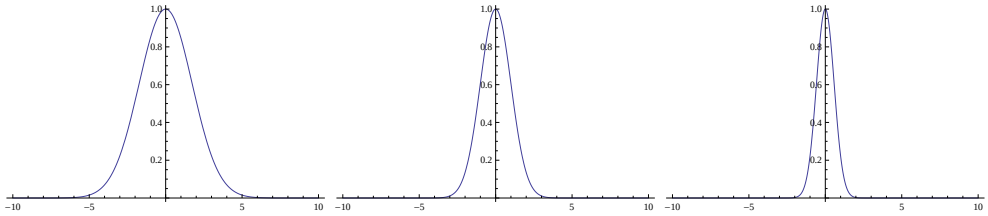

Figura 3.5: Funcţiile $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x^2}$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$, $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}$.

care pot fi privite ca versiuni discrete ale funcţiilor (vezi Figura 3.5)

$$g_\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g_\kappa(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}x^2} \qquad\qquad \kappa \in (0, \infty)$$

verifică relaţia

$$F[\mathbf{g}_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\, \mathbf{g}_{\frac{1}{\kappa}}.$$

3.7.16 Dacă alegem pentru transformata Fourier a unei funcţii continue definiţia

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\, dx$$

atunci (a se vedea pag. 80-**9**)

$$\mathcal{F}[g_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\, g_{\frac{1}{\kappa}}.$$

Capitolul 4

Transformarea Fourier a funcţiilor

4.1 Exemple

4.1.1 Definiţie. Fie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Funcţia

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)dx$$

(în cazul în care există) se numeşte *transformata Fourier* a lui φ.

Figura 4.1: Funcţia (4.1) în cazul $a=1$ şi transformata ei Fourier.

4.1.2 MATHEMATICA: Figura 4.1 s-a obţinut cu

```
In[1]:=Plot[HeavisidePi[x], {x, -4, 4}, Exclusions -> None]
       Plot[FourierTransform[HeavisidePi[t], t, x], {x, -30, 30},  PlotRange -> All]
```

4.1.3 Exerciţiu. Fie $a \in (0, \infty)$ şi

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad |x| \leq a \\ 0 & \text{dacă} \quad |x| > a. \end{cases} \tag{4.1}$$

Să se arate că (vezi Fig. 4.1)

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{2}{\xi} \sin a\xi.$$

Rezolvare. Pentru $\xi \neq 0$ avem

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\Big|_{-a}^{a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}}{\mathrm{i}\xi} = \frac{2}{\xi}\,\sin a\xi.$$

4.1.4 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\varphi(t)dt$

`In[1]:=FourierTransform[HeavisidePi[t], t, x]` $\mapsto$ Out[1]=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Sinc}\left[\frac{x}{2}\right]$

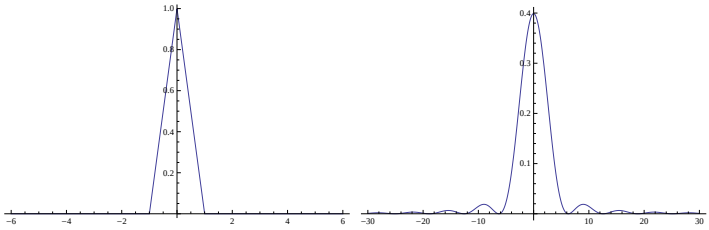

Figura 4.2: Funcţia (4.2) în cazul $a=1$ şi transformata ei Fourier.

4.1.5 Exerciţiu. Fie $a \in (0,\infty)$ şi

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a} & \text{dacă} \quad |x| \leq a \\ 0 & \text{dacă} \quad |x| > a. \end{cases} \tag{4.2}$$

Să se arate că (vezi Fig. 4.2)

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{4\sin^2(a\xi/2)}{a\xi^2}.$$

Rezolvare. In cazul $\xi \neq 0$, utilizând schimbarea de variabilă $x \mapsto -x$ şi formulele

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}, \qquad \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-cost}{2}$$

obţinem

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\varphi](\xi) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(x)\,dx = \int_{-a}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\left(1+\frac{x}{a}\right)\,dx + \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\left(1-\frac{x}{a}\right)\,dx \\
&= \textstyle\int_{0}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\left(1-\frac{x}{a}\right)\,dx + \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\left(1-\frac{x}{a}\right)\,dx = 2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\cos x\xi\,dx \\
&= \textstyle\frac{2}{\xi}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\,(\sin x\xi)'\,dx = \frac{2}{\xi}\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin x\xi\Big|_{0}^{a} + \frac{2}{a\xi}\int_{0}^{a}\sin x\xi\,dx \\
&= \textstyle -\frac{2}{a\xi^2}\cos x\xi\Big|_{0}^{a} = \frac{2}{a\xi^2}(1-\cos x\xi) = \frac{4\sin^2(a\xi/2)}{a\xi^2}.
\end{aligned}$$

In cazul $\xi = 0$ avem

$$\mathcal{F}[\varphi](0) = \textstyle\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{x}{a}\right)\,dx + \int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\,dx = a.$$

Deoarece

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{4\sin^2(a\xi/2)}{a\xi^2}=a\lim_{\xi\to 0}\left[\frac{\sin(a\xi/2)}{a\xi/2}\right]^2=a$$

transformata Fourier este o funcţie continuă.

4.1.6 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\varphi(t)dt$

```
In[1]:=FourierTransform[(1-Abs[t]) HeavisidePi[t/2], t, x]
```
$\mapsto$ Out[1]=$\frac{-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{2\pi}\,x^2}$

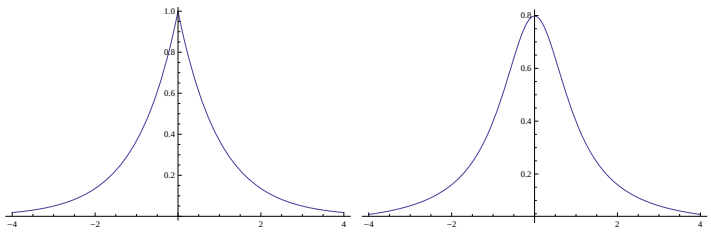

Figura 4.3: Funcţia $\mathrm{e}^{-|x|}$ şi transformata ei Fourier.

4.1.7 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}](\xi)=\frac{2a}{a^2+\xi^2}$$

oricare ar fi $a\in(0,\infty)$.

Rezolvare. Considerând integrala în sensul valorii principale avem

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\mathrm{e}^{-a|x|}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}(\cos\xi x+\mathrm{i}\sin\xi x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\cos\xi x\,dx=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx.$$

Integrând de două ori prin părţi obţinem relaţia

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx=\frac{1}{\xi}\mathrm{e}^{-ax}\sin\xi x\Big|_0^{\infty}+\frac{a}{\xi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin\xi x\,dx$$

$$=-\frac{a}{\xi^2}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\Big|_0^{\infty}-\frac{a^2}{\xi^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx=\frac{a}{\xi^2}-\frac{a^2}{\xi^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx$$

adică

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx=\frac{a}{\xi^2}-\frac{a^2}{\xi^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx$$

din care deducem

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx=\frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

4.1.8 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\varphi(t)dt$

`In[1]:=FourierTransform[1/(1 + t^2), t, x]` $\mapsto$ Out[1]=$\mathrm{e}^{-\mathrm{Abs[x]}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

`In[1]:=FourierTransform[Exp[-Abs[t]], t, x]` $\mapsto$ Out[1]=$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1+\mathrm{x}^2}$

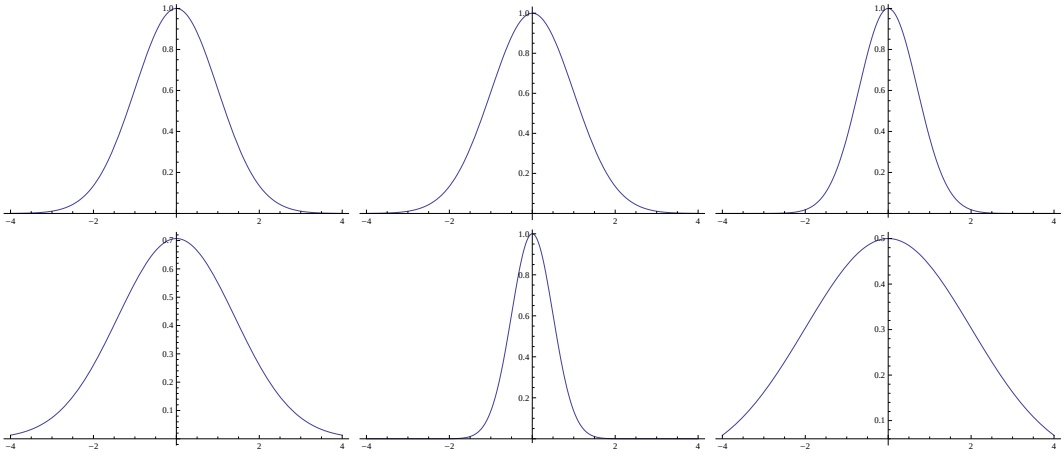

Figura 4.4: Funcţiile $\mathrm{e}^{-x^2/2}$, e^{-x^2}, e^{-2x^2} (stânga) şi transformatele lor (dreapta).

4.1.9 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

oricare ar fi $a \in (0,\infty)$.

Rezolvare. Avem

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+\mathrm{i}\xi x}dx = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(x-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2}dx.$$

Plecând de la integrala

$$\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2}dt + \int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2}dz - \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2}dz + \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{-r} \mathrm{e}^{-az^2}dz = 0$$

a funcţiei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^{-az^2}$$

de-a lungul drumului dreptunghiular din Figura 4.5 arătăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Avem

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-at^2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-at^2}dt.$$

Alegând pentru drumul liniar ce uneşte r cu $r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_1:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \gamma_1(t)=r-\mathrm{i}t\frac{\xi}{2a}$$

obţinem relaţia

$$\int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}\mathrm{e}^{-az^2}dz=\int_0^1\mathrm{e}^{-a\left(r-\mathrm{i}t\frac{\xi}{2a}\right)^2}(-\mathrm{i})\frac{\xi}{2a}dt=-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\,\mathrm{e}^{-ar^2}\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}rt\xi+\frac{t^2\xi^2}{4a}}dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r\to\infty}\int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}\mathrm{e}^{-az^2}dz=0.$$

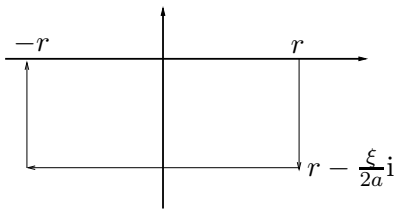

Figura 4.5: Drumul dreptunghiular utilizat.

Similar se arată că

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}\mathrm{e}^{-az^2}dz=0.$$

Alegând pentru drumul liniar ce uneşte $-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ cu $r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_2:[-r,r]\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \gamma_2(t)=t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$$

obţinem relaţia

$$\int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}\mathrm{e}^{-az^2}dz=\int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2}dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}\mathrm{e}^{-az^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2}dt.$$

4.1.10 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\varphi(t)dt$

`In[1]:=FourierTransform[Exp[-t^2/2], t, x]` $\mapsto$ Out[1]=$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$

`In[2]:=FourierTransform[Exp[-t^2], t, x]` $\mapsto$ Out[2]=$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{2}}$

`In[3]:=FourierTransform[Exp[-2t^2], t, x]` $\mapsto$ Out[3]=$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}}{2}$

4.2 Aplicaţii

4.2.1

4.3 Definiţii şi rezultate fundamentale

4.3.1 Teoremă. *Fie $\kappa\in(0,\infty)$ o constantă fixată.*

Dacă $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ este astfel încât integralele sunt convergente atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\xi x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi u}\varphi(u)\,du\right)d\xi=\frac{2\pi}{\kappa}\,\varphi(x)$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi u}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa ux}\varphi(x)\,dx\right)du=\frac{2\pi}{\kappa}\,\varphi(\xi).$$

Demonstraţie. Oricare ar fi $a\in(0,\infty)$ avem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a\xi^2-\mathrm{i}\kappa\xi x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi u}\varphi(u)\,du\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\,\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi(u-x)}\,\mathrm{e}^{-a\xi^2}\,d\xi\right]du=\sqrt{\tfrac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\,\mathrm{e}^{-\frac{\kappa^2(u-x)^2}{4a}}du.$$

Utilizând în ultima integrală schimbarea de variabilă $u=x+2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t$ obţinem relaţia

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a\xi^2-\mathrm{i}\kappa\xi x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi u}\varphi(u)\,du\right)d\xi=\frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x+2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t\right)\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

care pentru $a\searrow 0$ devine

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\xi x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi u}\varphi(u)\,du\right)d\xi=\frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-t^2}dt.$$

Dar

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-t^2}dt=\frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa}\,\varphi(x)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt=\frac{2\pi}{\kappa}\,\varphi(x).$$

A doua relaţie din enunţul teoremei se poate demonstra similar.

4.3.2 Definiţiile transformărilor Fourier directă şi inversă se bazează pe teorema precedentă. Există mai multe posibilităţi de a defini aceste transformări, trecerea de la o variantă la alta făcându-se foarte uşor.

4.3.3 In cazul $\kappa=1$, relaţiile din teoremă se pot scrie

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}\varphi(u)\,du\right)d\xi=\varphi(x)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}\left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\varphi(x)\,dx\right)du=\varphi(\xi)$$

şi sugerează pentru *transformările Fourier directă şi inversă* alegerile

$$\varphi\mapsto\mathcal{F}[\varphi],\qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\varphi(x)\,dx$$
$$\psi\mapsto\mathcal{F}^{-1}[\psi],\qquad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Ea este alegerea preferată în unele cărţi de ecuaţiile fizicii matematice [9] şi va fi utilizată pe parcursul acestui capitol, exceptând ultima secţiune dedicată aplicaţiilor în mecanica cuantică.

4.3.4 In cazul $\kappa=1/\hbar$, relaţiile din teoremă scrise sub forma

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x/\hbar}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u/\hbar}\varphi(u)\,du\right)d\xi=\varphi(x)$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u/\hbar}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux/\hbar}\varphi(x)\,dx\right)du=\varphi(\xi)$$

sugerează alegerea

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x/\hbar}\,\varphi(x)\,dx$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x/\hbar}\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Este alegerea preferată în multe cărţi şi articole de mecanică cuantică şi va fi utilizată în ultima secţiune a prezentului capitol. Intr-un sistem de unităţi de măsură în care $\hbar=1$ relaţiile anterioare devin

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\varphi(x)\,dx$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

4.3.5 In cazul $\kappa=2\pi$, relaţiile din teoremă scrise sub forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi u}\varphi(u)\,du\right)d\xi=\varphi(x)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi u}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ux}\varphi(x)\,dx\right)du=\varphi(\xi)$$

sugerează alegerea

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\, \varphi(x)\, dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\xi x}\, \psi(\xi)\, d\xi.$$

Este alegerea preferată în unele cărţi şi articole referitoare la fizica cristalelor.

4.3.6 Relaţia (a se vedea pag. 80-**9**)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}} \qquad \text{oricare ar fi } \ a \in (0,\infty)$$

se poate scrie sub forma

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-ax^2}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}} \qquad \text{oricare ar fi } \ a \in (0,\infty).$$

In particular, alegând $a = \frac{1}{2}$ obţinem

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

4.3.7 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \varphi(t) dt$

```
In[1]:=FourierTransform[Exp[-t^2], t, x]   ↦   Out[1]=e^(-x^2/4)/Sqrt[2]
```

4.3.8 Teoremă. *Dacă $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ atunci transformata Fourier a lui φ*

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, dx$$

aparţine de asemenea spaţiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi au loc relaţiile

$$(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} = \mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k \varphi] \qquad\qquad \mathcal{F}[\varphi^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k\, \mathcal{F}[\varphi].$$

Demonstraţie. Aplicaţia $\mathcal{F}[\varphi]$ se defineşte cu ajutorul unei integrale improprii cu parametru. Din definiţia spaţiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ rezultă că există $M \in (0,\infty)$ astfel încât

$$|x^2 \varphi(x)| \le M \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}.$$

Din acestă relaţie rezultă că pentru $x \neq 0$ avem majorarea

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)| \le \frac{M}{x^2}.$$

Convergenţa integralei $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, dx$ rezultă din convergenţa integralelor

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx \qquad\qquad \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

pe baza criteriului comparaţiei. Din faptul că φ descreşte la infinit mai repede decât orice putere a lui x rezultă posibilitatea de a deriva sub integrală de un număr nelimitat de ori. Se obţine astfel relaţia

$$(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}x)^k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \, \varphi(x) \, dx$$

convergenţa integralei rezultând din existenţa unei constante $M_k \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|x^{k+2}\varphi(x)| \leq M_k \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in \mathbb{R}$$

şi a majorării

$$|(\mathrm{i}x)^k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \, \varphi(x)| \leq \frac{M_k}{x^2}.$$

Deducem astfel că transformata Fourier $\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcţie indefinit derivabilă şi cu derivatele funcţii mărginite. Relaţia

$$\mathcal{F}[\varphi^{(k)}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi^{(k)}(x) \, dx = (-\mathrm{i}\xi)^k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x) \, dx = (-\mathrm{i}\xi)^k \mathcal{F}[\varphi](\xi)$$

obţinută utilizând integrarea prin părţi conduce la egalitatea

$$|\, \xi^k \, \mathcal{F}[\varphi](\xi) \,| = |\, \mathcal{F}[\varphi^{(k)}](\xi) \,|$$

care arată că $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4.3.9 Teoremă. *Transformarea Fourier a funcţiilor de probă*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \ \varphi \mapsto \mathcal{F}[\varphi], \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x) \, dx$$

este o aplicaţie bijectivă şi inversa ei este transformarea

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \ \psi \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\psi], \qquad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \psi(\xi) \, d\xi.$$

Demonstraţie. Afirmaţia este o consecinţă directă a teoremelor anterioare.

4.3.10 Se poate arăta [9] că transformările $\mathcal{F}^{\pm 1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sunt continue, adică

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}^{\pm 1}[\varphi_n] \longrightarrow \mathcal{F}^{\pm 1}[\varphi].$$

4.3.11 Transformările Fourier directă şi inversă au expresii foarte asemanatoare. Utilizând schimbarea de variabilă $\xi = -y$ obţinem

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \psi(\xi) \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \psi(-y) \, dy = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\check{\psi}](x)$$

adică

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\check{\psi}]$$

unde $\check{\psi}$ este aplicaţia

$$\check{\psi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \check{\psi}(y) = \psi(-y).$$

In particular,

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[\varphi]\right](p) = \check{\varphi}.$$

4.3.12 Polinoamele Hermite (a se vedea pag. **??-??**)

$$H_n(x) = (-1)^n \, \mathrm{e}^{x^2} \, \frac{d^n}{dx^n} \, \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad n \in \{0, 1, 2, ...\}$$

verifică relaţiile de recurenţă

$$H_{n+1}(x) - 2x \, H_n(x) + 2n \, H_{n-1}(x) = 0, \qquad H_n'(x) = 2n \, H_{n-1}(x).$$

4.3.13* **Teoremă**. *Oricare ar fi* $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, *funcţia*

$$\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi_n(x) = H_n(x) \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

este o funcţie proprie a transformării Fourier

$$\mathcal{F}\left[H_n(x) \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = \sqrt{2\pi} \, \mathrm{i}^n \, H_n(\xi) \, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Demonstraţie. Din relaţia $\left(\mathcal{F}[\varphi]\right)^{(k)} = \mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k \varphi]$ care se poate scrie

$$\mathcal{F}[x^k \varphi](\xi) = (-\mathrm{i})^k \, \frac{d^k}{d\xi^k} \mathcal{F}[\varphi](\xi)$$

rezultă

$$\mathcal{F}\left[H_n(x) \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right] = H_n\left(-\mathrm{i} \, \frac{d}{d\xi}\right) \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

şi prin urmare (a se vedea pag. 84-**6**)

$$\mathcal{F}\left[H_n(x) \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \sqrt{2\pi} \, H_n\left(-\mathrm{i} \, \frac{d}{d\xi}\right) \, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Folosind metoda inducţiei matematice vom arăta că

$$H_n\left(-\mathrm{i} \, \frac{d}{d\xi}\right) \, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = \mathrm{i}^n \, H_n(\xi) \, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Relaţia are loc pentru $n = 0$ şi presupunând că

$$H_k\left(-\mathrm{i} \, \frac{d}{d\xi}\right) \, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = \mathrm{i}^k \, H_k(\xi) \, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \qquad \text{pentru orice} \quad k \leq n-1$$

cu ajutorul relaţiilor de recurenţă obţinem

$$\begin{aligned}
H_n\left(-\mathrm{i}\,\tfrac{d}{d\xi}\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} &= -2\mathrm{i}\,\tfrac{d}{d\xi}H_{n-1}\left(-\mathrm{i}\,\tfrac{d}{d\xi}\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} - 2(n-1)\,H_{n-2}\left(-\mathrm{i}\,\tfrac{d}{d\xi}\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= -2\mathrm{i}\,\tfrac{d}{d\xi}\left[\mathrm{i}^{n-1}\,H_{n-1}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\right] - 2(n-1)\,\mathrm{i}^{n-2}\,H_{n-2}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= \mathrm{i}^n\left[-2H'_{n-1}(\xi) + 2\,\xi\,H_{n-1}(\xi) + 2(n-1)\,H_{n-2}\,(\xi)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= \mathrm{i}^n\left[-4(n-1)\,H_{n-2}(\xi) + 2\,\xi\,H_{n-1}(\xi) + 2(n-1)\,H_{n-2}\,(\xi)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= \mathrm{i}^n\left[2\,\xi\,H_{n-1}(\xi) - 2(n-1)\,H_{n-2}\,(\xi)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = \mathrm{i}^n\,H_n(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Capitolul 5

Transformarea Fourier a distribuţiilor

5.1 Exemple

5.1.1 Se ştie că $\sqrt{-4}$ nu există în $\mathbb{R}$. Dacă scufundăm pe $\mathbb{R}$ în $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : \ x \mapsto x + 0\mathrm{i}$$

identificând numărul real x cu numărul complex $x + 0\mathrm{i}$ atunci $\sqrt{-4}$ există, dar nu este un număr real. Similar, o funcţie nederivabilă clasic poate deveni derivabilă dacă scufundăm funcţiile uzuale (doar o parte dintre ele !) în spaţiul distribuţiilor, dar derivata nu mai este o funcţie uzuală ci o distribuţie.

5.1.2 O cunoaştere în profunzime a teoriei distribuţiilor este ceva mai dificil de realizat, dar pentru a efectua anumite calcule cu distribuţii este suficient să cunoaştem câteva elemente simple:

- O *distribuţie* (temperată) este o funcţie liniară şi continuă

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$$

(se preferă să se scrie $\langle f, \varphi \rangle$ în loc de $f(\varphi)$) definită pe spaţiul vectorial $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ format din funcţiile indefinit derivabile

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \ x \mapsto \varphi(x)$$

care, atât ele cât şi derivatele de orice ordin, descresc la $\pm\infty$ mai rapid decât $1/|x|^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

- *Distribuţii de tip funcţie*: distribuţia corespunzătoare unei funcţii

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

în cazul în care există, este

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_f, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

(in mod uzual, distribuţia corespunzătoare lui f se notează tot cu f).

- *Distribuţia Dirac*: pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$, aplicaţia

$$\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \delta_a, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(a)$$

este distribuţie. In loc de δ_0 se scrie doar δ, adică avem $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

- *Derivata* distribuţiei $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ este distribuţia

$$f' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle f', \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\langle f, \varphi' \rangle$$

- *Produsul* dintre funcţia indefinit derivabilă $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ şi distribuţia $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$, în cazul în care există, este distribuţia

$$\vartheta f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \vartheta f, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \vartheta \varphi \rangle$$

- *Transformata Fourier* a unei funcţii din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ este tot o funcţie din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \varphi \mapsto \mathcal{F}[\varphi]$$

este transformare bijectivă. Transformata Fourier a distribuţiei f este

$$\mathcal{F}[f] : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

iar transformata Fourier inversă a distribuţiei f este distribuţia

$$\mathcal{F}^{-1}[f] : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle.$$

5.1.3 Se poate arăta că funcţia (vezi Fig. 5.1)

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

aparţine spaţiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Avem

$$\varphi'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \varphi''(x) = (4x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \ldots$$

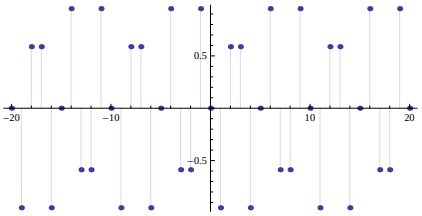

Figura 5.1: Funcţia $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

şi în general,

$$\varphi^{(k)}(x) = \text{polinom} \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ştim că

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}.$$

Inlocuind x cu x^2 obţinem

$$\mathrm{e}^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}$$

Oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, avem

$$0 \leq \frac{|x|^n}{\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{|x|^n}{1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots} < \frac{|x|^n}{\frac{x^{2n}}{n!}} \longrightarrow 0 \qquad \text{pentru } \ x \to \infty.$$

5.1.4 Exerciţiu. Să se arate că relaţiile

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

definesc aplicaţii liniare.

Rezolvare. Avem

$$\langle T_f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, (\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x))\, dx = \alpha\langle T_f, \varphi \rangle + \beta\langle T_f, \psi \rangle$$
$$\langle \delta_a, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = (\alpha\varphi + \beta\psi)(a) = \alpha\varphi(a) + \beta\psi(a) = \alpha\langle \delta_a, \varphi \rangle + \beta\langle \delta_a, \psi \rangle.$$

5.1.5 O funcţie este numită funcţie derivabilă dacă este derivabilă în fiecare punct. Funcţia Heaviside (vezi Fig. 5.2)

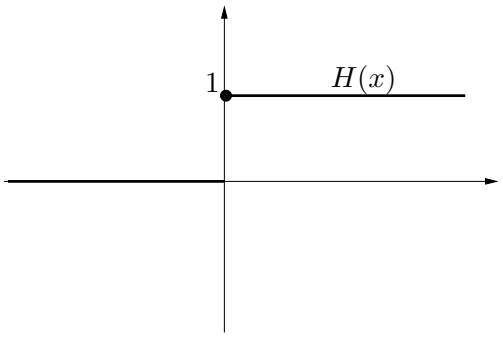

Figura 5.2: Funcţia Heaviside H.

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

nu este o funcţie derivabilă deoarece nu este derivabilă în 0

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ \text{nu există} & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

Distribuţia corespunzătoare (numită *distribuţia Heaviside*)

$$T_H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

este însă derivabilă şi

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)|_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, adică avem

$$(T_H)' = \delta.$$

Funcţia Heaviside nu este derivabilă clasic

$$H'(x) \overset{\text{clasic}}{=\!=} \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ \text{nu există} & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

dar este derivabilă în sensul teoriei distribuţiilor şi

$$H' \overset{\text{distrib.}}{=\!=} \delta.$$

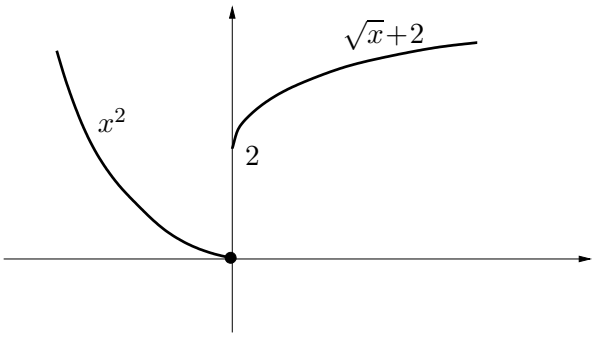

Figura 5.3: Funcţia f.

5.1.6 Exerciţiu. Fie funcţia (vezi Fig. 5.3)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 2 & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$$

Să se arate că

$$(T_f)' = T_{f'} + 2\delta$$

Rezolvare. Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{0} x^2\, \varphi'(x)\, dx + \int_0^{\infty} (\sqrt{x} + 2)\varphi'(x)\, dx \\ &= -x^2\, \varphi(x)|_{-\infty}^{0} + \textstyle\int_{-\infty}^{0} 2x\, \varphi(x)\, dx \\ &\quad -(\sqrt{x} + 2)\varphi(x)|_0^{\infty} + \textstyle\int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(x)\, dx \\ &= 2\varphi(0) + \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle T_{f'} + 2\delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

unde f' este derivata clasică

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dacă} \quad x < 0 \\ \text{nu există} & \text{dacă} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}$$

prelungită arbitrar în $x = 0$.

5.1.7 Exerciţiu. Ştim că

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Să se arate că derivata distribuţiei corespunzătoare funcţiei $\sin x$ este distribuţia corespunzătoare funcţiei $\cos x$, adică

$$(T_{\sin x})' = T_{\cos x}.$$

Rezolvare. Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}\langle (T_{\sin x})', \varphi\rangle &= -\langle T_{\sin x}, \varphi`\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, \varphi`(x)\, dx \\ &= -\sin x\, \varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, \varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Deoarece

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$$

obţinem

$$\langle (T_{\sin x})', \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, \varphi(x)\, dx = \langle T_{\cos x}, \varphi\rangle$$

oriacrea ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi prin urmare

$$(T_{\sin x})' = T_{\cos x}.$$

Se observă că φ a jucat doar rolul unui catalizator, dispărând din rezultatul final.

5.1.8 Exerciţiu. Să se arate că dacă $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ atunci

$$\vartheta\delta_a = \vartheta(a)\, \delta_a.$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \vartheta\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, \vartheta\varphi\rangle = (\vartheta\varphi)(a) = \vartheta(a)\, \varphi(a) = \vartheta(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle = \langle \vartheta(a)\, \delta_a, \varphi\rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.1.9 Exerciţiu. Să se arate că

$$x\delta` = -\delta, \qquad x\delta`' = -2\delta`, \qquad x^2\delta`' = 2\,\delta$$

Rezolvare. Avem

$\langle x\delta`, \varphi\rangle = \langle \delta`, x\varphi\rangle = -\langle \delta, (x\varphi)'\rangle = -\langle \delta, \varphi + x\varphi'\rangle = -\varphi(0) = \langle -\delta, \varphi\rangle$

$\langle x\delta``, \varphi\rangle = \langle \delta``, x\varphi\rangle = \langle \delta, (x\varphi)''\rangle = \langle \delta, 2\varphi` + x\varphi`'\rangle = 2\varphi`(0) = \langle 2\delta, \varphi`\rangle = -\langle 2\delta`, \varphi\rangle$

$\langle x^2\delta``, \varphi\rangle = \langle \delta``, x^2\varphi\rangle = \langle \delta, (x^2\varphi)''\rangle = \langle \delta, 2\varphi + 4x\varphi` + x^2\varphi`'\rangle = 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi\rangle.$

5.1.10 Exerciţiu. Să se arate că relaţiile

$$x\delta^{(k)} = -k\delta^{(k-1)} \qquad x^k\delta^{(k)} = (-1)^k k!\, \delta$$

au loc oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Rezolvare. Utilizând formula lui Leibniz

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, f^{(j)} \, g^{(k-j)}$$

obţinem

$$\langle x\delta^{(k)}, \varphi\rangle = \langle \delta^{(k)}, x\varphi\rangle = (-1)^k \langle \delta, (x\varphi)^{(k)}\rangle = (-1)^k \langle \delta, x\varphi^{(k)} + k\varphi^{(k-1)}\rangle$$

$$= (-1)^k k\varphi^{(k-1)}(0) = -k(-1)^{k-1}\langle \delta, \varphi^{(k-1)}\rangle = -k\langle \delta^{(k-1)}, \varphi\rangle = \langle -k\delta^{(k-1)}, \varphi\rangle$$

şi

$$\langle x^k\delta^{(k)}, \varphi\rangle = \langle \delta^{(k)}, x^k\varphi\rangle = (-1)^k \langle \delta, (x^k\varphi)^{(k)}\rangle$$

$$= (-1)^k \left\langle \delta, \textstyle\sum_{j=0}^{k} C_k^j (x^k)^{(j)} \varphi^{(k-j)} \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta, C_k^k (x^k)^{(k)} \varphi \right\rangle = \langle (-1)^k k!\delta, \varphi\rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.1.11 Propoziţie. *Oricare ar fi* $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ *şi* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *avem*

$$(\vartheta\, f)' = \vartheta'\, f + \vartheta\, f'$$

Demonstraţie. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avem

$$\langle (\vartheta\, f)',\, \varphi\rangle = -\langle \vartheta\, f,\, \varphi'\rangle = -\langle f,\, \vartheta\, \varphi'\rangle = -\,\langle f,\, (\vartheta\, \varphi)' - \vartheta'\, \varphi\rangle$$

$$= \langle f',\, \vartheta\, \varphi\rangle + \langle f,\, \vartheta'\, \varphi\rangle = \langle \vartheta'\, f + \vartheta\, f',\, \vartheta\rangle\,.$$

5.1.12 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\delta] = 1, \qquad \mathcal{F}[1] = 2\pi\,\delta.$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}0x}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle$$

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi\rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle \mathcal{F}[\delta], 2\pi\mathcal{F}^{-1}[\check{\varphi}]\rangle = \langle \delta, 2\pi\check{\varphi}\rangle = 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta, \varphi\rangle.$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.1.13 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\varphi(t)dt$

`In[1]:=FourierTransform[1, t, x]` $\mapsto$ Out[1]=$\sqrt{2\pi}$ DiracDelta[x]

5.1.14 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\delta_a] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}, \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})\right] = \cos ax\,, \qquad \mathcal{F}[\cos ax] = \pi(\delta_a + \delta_{-a}).$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\delta_a], \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \varphi(x)\, dx = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}, \varphi \rangle$$

Transformarea Fourier fiind liniară obţinem

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}[\delta_a] + \mathcal{F}[\delta_{-a}]\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}}{2} = \cos ax.$$

Din relaţia precedentă rezultă ca

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos ax] = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}).$$

Dar efectuând schimbarea de variabilă $x \mapsto -x$ obţinem

$$\langle \mathcal{F}[\cos ax], \varphi \rangle = \langle \cos ax, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ax \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \varphi(t) dt \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos ax \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \varphi(t) dt \right) dx = \langle \cos ax, 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\cos ax], \varphi \rangle$$

adică

$$\mathcal{F}[\cos ax] = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\cos ax].$$

5.1.15 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \varphi(t) dt$

`In[1]:=FourierTransform[Cos[t], t, x]` $\mapsto$ Out[1]=$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[−1+x]+$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[1+x]

5.1.16 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[x^k] = 2\pi(-\mathrm{i})^k\, \delta^{(k)} \qquad\qquad \mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k.$$

Rezolvare. Avem

$$\mathcal{F}[x^k] = (-\mathrm{i})^k\, \mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k\, 1] = (-\mathrm{i})^k\, (\mathcal{F}[1])^{(k)} = 2\pi(-\mathrm{i})^k\, \delta^{(k)}$$

şi

$$\mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k \mathcal{F}[\delta] = (-\mathrm{i}\xi)^k\, 1 = (-\mathrm{i}\xi)^k.$$

5.1.17 Definiţie. Spunem că şirul de distribuţii $(f_n)_{n\geq 0}$ converge la distribuţia f

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \qquad \text{oricare ar fi } \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

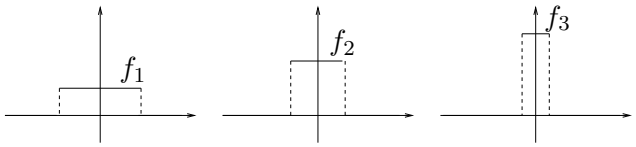

Figura 5.4: Graficele funcţiilor f_1, f_2, şi f_3.

5.1.18 Exerciţiu. Funcţiei (a se vedea Figura 5.4)

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă} \quad |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{dacă} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

îi corespunde distribuţia

$$T_{f_n} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)\, dx$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Limita şirului de funcţii $(f_n)_{n \geq 1}$ este

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

dar

$$\lim_{n \to \infty} T_{f_n} = \delta.$$

Rezolvare. Utilizând schimbarea de variabilă $t = nx$ obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\, dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(0)\, dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Relaţia

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \delta$$

este adevărată dacă prin f_n se înţelege distribuţia T_{f_n}.

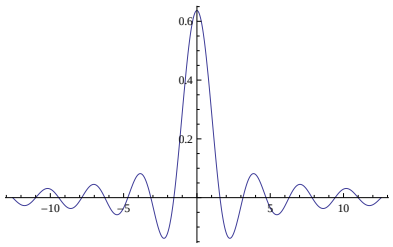

Figura 5.5: Graficul funcţiei f_2.

5.1.19 Exerciţiu. Funcţiei (a se vedea Figura 5.5)

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$$

îi corespunde distribuţia regulată

$$T_{f_n} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Limita şirului de funcţii $(f_n)_{n \geq 1}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

nu este o functie local integrabilă, dar

$$\lim_{n \to \infty} T_{f_n} = \delta.$$

Rezolvare. Utilizând formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$$

şi schimbarea de variabilă $t = nx$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \varphi(0)\, dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Relaţia

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \delta$$

este adevărată dacă prin f_n se înţelege distribuţia T_{f_n}.

5.1.20 In cazul funcţiei

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

relaţia

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \ \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

nu defineşte o distribuţie. Se poate însă arăta că funcţionala

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right)$$

este distribuţie (numită *valoarea principală* a lui $\frac{1}{x}$.)

5.1.21 Exerciţiu. Să se arate că

$$x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1.$$

Rezolvare. Avem

$$\left\langle x\cdot \mathcal{P}\tfrac{1}{x},\varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\tfrac{1}{x}, x\,\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\tfrac{x\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\tfrac{x\varphi(x)}{x}\,dx\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx = \langle 1,\varphi\rangle$$

oricare ar fi $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

5.1.22 Exerciţiu. Fie funcţia

$$f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(x)=\ln|x|.$$

Aplicaţia

$$\tilde f:\mathcal{D}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \left\langle\tilde f,\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln|x|\,\varphi(x)\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\ln|x|\,\varphi(x)\,dx\right)$$

este distribuţie şi

$$(\tilde f)'=\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părţi obţinem

$$\langle(\tilde f)',\varphi\rangle=-\langle\tilde f,\varphi'\rangle=-\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln(-x)\,\varphi'(x)\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\ln x\,\varphi'(x)\,dx\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\tfrac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\tfrac{\varphi(x)}{x}\,dx\right)=\langle\mathcal{P}\tfrac{1}{x},\varphi\rangle$$

oricare ar fi $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

5.1.23* Exerciţiu. Fie T_H distribuţia regulată corespunzătoare funcţiei Heaviside

$$H:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad H(x)=\begin{cases}0 & \text{dacă}\quad x<0\\ 1 & \text{dacă}\quad x\geq 0.\end{cases}$$

Să se arate că

$$\mathcal{F}[T_H]=-\mathrm{i}\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi}+\pi\,\delta.$$

Rezolvare. Plecând de la relaţia $(T_H)'=\delta$ deducem succesiv

$$\mathcal{F}[(T_H)']=1$$
$$-\mathrm{i}x\,\mathcal{F}[T_H]=1$$
$$\mathcal{F}[T_H]=-\mathrm{i}\,\mathcal{P}\tfrac{1}{x}+C\,\delta$$

unde C este o constantă. Ultima relaţie este echivalentă cu

$$\langle\mathcal{F}[T_H],\varphi\rangle=-\mathrm{i}\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle+C\langle\delta,\varphi\rangle,\qquad\text{oricare ar fi }\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).\tag{5.1}$$

Deoarece

$$\langle \mathcal{F}[T_H], \mathrm{e}^{-x^2} \rangle = \langle T_H, \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}] \rangle = \langle T_H, \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}} \rangle$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} dt = \pi$$

şi

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \mathrm{e}^{-x^2} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\, dx \right) = 0$$

rezultă că în cazul $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ relaţia (5.1) devine $\pi = C \langle \delta, \mathrm{e}^{-x^2} \rangle = C$.

5.1.24 **MATHEMATICA:** Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \varphi(t) dt$

`In[1]:=FourierTransform[HeavisideTheta[t], t, x]` $\mapsto$ Out[1]$= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{x}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,$DiracDelta[x]

5.1.25* **Exerciţiu**. Să se arate că

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = \pi \mathrm{i}\, T_{\mathrm{sign}}.$$

unde T_{sign} este distribuţia regulată corespunzătoare funcţiei

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Plecând de la relaţia $x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$ deducem succesiv

$$\mathcal{F}\left[x \cdot \mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right] = 2\pi\, \delta$$

$$-\mathrm{i}\mathcal{F}\left[\mathrm{i}x \cdot \mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right] = 2\pi\, \delta$$

$$-\mathrm{i}\left(\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right]\right)' = 2\pi\, \delta$$

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right] = 2\pi\mathrm{i}\, H + C$$

unde C este o constantă. Ultima relaţie este echivalentă cu

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right], \varphi \right\rangle = 2\pi\mathrm{i}\, \langle H, \varphi \rangle + C\langle 1, \varphi \rangle, \qquad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

Deoarece

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right], \mathrm{e}^{-x^2} \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \right\rangle = 0$$

în cazul $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ relaţia (5.2) devine

$$0 = 2\pi\mathrm{i} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx + C \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

şi conduce la $C = -\pi\mathrm{i}$. Dar $2\pi\mathrm{i}\, H - \pi\mathrm{i}$ şi sign definesc aceeaşi distribuţie .

5.1.26 MATHEMATICA: Definiţia utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\varphi(t)dt$

`In[1]:=FourierTransform[1/t, t, x]` $\mapsto$ Out[1]=$\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ Sign[x]

5.2 Aplicaţii

5.2.1 .....

5.3 Definiţii şi rezultate fundamentale

5.3.1 Orice distribuţie temperată este indefinit derivabilă.

Derivata de ordin k a unei distribuţii f este distribuţia

$$f^{(k)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle f^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)}\rangle$$

5.3.2 Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este derivabilă şi dacă f' este continuă atunci

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x)\,\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\langle T_f, \varphi'\rangle.$$

Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă clasic atunci derivata distribuţiei T_f este distribuţia definită de derivata clasică $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, adică

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

Derivarea în sensul distribuţiilor prelungeşte operaţia de derivare clasică la cazuri în care ea nu este aplicabilă.

5.3.3 Exerciţiu. Să se arate că dacă funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este derivabilă pe $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$ şi dacă limitele laterale

$$f(a-) = \lim_{x \nearrow a} f(x), \qquad f(a+) = \lim_{x \searrow a} f(x)$$

sunt finite atunci

$$(T_f)' = T_{f'} + (\, f(a+) - f(a-)\,)\,\delta_a.$$

Rezolvare. Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}\langle (T_f)', \varphi\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx\\ &= -\textstyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{a}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx\\ &= -f(x)\,\varphi(x)|_{-\infty}^{a} + \textstyle\int_{-\infty}^{a} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\\ &\quad -f(x)\,\varphi(x)|_{a}^{\infty} + \textstyle\int_{a}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\\ &= (\,f(a+)-f(a-)\,)\,\varphi(a) + \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

5.3.4 Dacă $\vartheta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ şi dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este continuă atunci

$$\langle T_{\vartheta f}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x)\,f(x)\;\varphi(x)\,dx = \langle T_f, \vartheta\varphi\rangle.$$

5.3.5 Propoziţie. *Spaţiul* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *al funcţiilor indefinit derivabile*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu proprietatea că oricare ar fi $k, m \in \mathbb{N}$ *există o constantă* $c_{k,m}$ *astfel încât*

$$|x^k\,\varphi^{(m)}(x)| \le c_{k,m} \qquad \textit{oricare ar fi} \quad x \in \mathbb{R}$$

considerat împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari uzuale

$$(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad (\lambda\,\varphi)(x) = \lambda\,\varphi(x)$$

este un spaţiu vectorial complex (numit spaţiul funcţiilor rapid descrescătoare).

Demonstraţie. Deoarece

$$|x^k(\varphi+\psi)^{(m)}(x)| \le |x^k\,\varphi^{(m)}(x)| + |x^k\,\psi^{(m)}(x)|$$

$$|x^k\,(\lambda\,\varphi)^{(m)}(x)| = |\lambda|\;|x^k\,\varphi^{(m)}(x)|$$

operaţiile adunare şi înmulţire cu scalari sunt bine definite, adică

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\end{array}\right\} \implies \varphi+\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

şi

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\\ \lambda \in \mathbb{C}\end{array}\right\} \implies \lambda\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Verificarea axiomelor spaţiului vectorial este imediată.

5.3.6 Definiţie. Spunem că şirul $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *converge* la funcţia constantă 0

dacă $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \, \varphi_n^{(m)}(x) \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

oricare ar fi $k, m \in \mathbb{N}$.

5.3.7 Definiţie. Spunem că o funcţie liniară

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este *continuă* dacă

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = 0.$$

5.3.8 Definiţie. Prin *distribuţie* (temperată) se înţelege o aplicaţie

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

care este liniară şi continuă. In loc de $f(\varphi)$ scriem $\langle f, \varphi \rangle$.

5.3.9 Propoziţie. *Spaţiul distribuţiilor*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{ \; f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ este liniară şi continuă } \}$$

considerat împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle, \qquad \langle \lambda \, f, \varphi \rangle = \lambda \, \langle f, \varphi \rangle$$

este un spaţiu vectorial.

5.3.10 Definiţie. Spunem despre o funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ că este *local integrabilă* dacă

$$\int_K |f(x)| \, dx < \infty, \qquad \text{oricare ar fi mulţimea compactă } \; K \subset \mathbb{R}.$$

Utilizăm notaţia

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \{ \, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ este local integrabilă } \}.$$

5.3.11 Orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este local integrabilă.

Funcţia

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$$

nu este local integrabilă deoarece

$$\int_{-1}^{1} |f(x)| \, dx = \infty.$$

5.3.12 Definiţie. Spunem că funcţia

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este cu creştere lentă dacă există $k \in \mathbb{N}$ şi $M \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k} \leq M \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}.$$

5.3.13 Exemplu. Orice funcţie polinomială este o funcţie cu creştere lentă. Funcţiile

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto \sin x \qquad \text{şi} \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto \cos x$$

fiind mărginite, sunt funcţii cu creştere lentă. Funcţia exponenţială

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto \mathrm{e}^x$$

nu este o funcţie cu creştere lentă.

5.3.14 Propoziţie. *Dacă funcţia local integrabilă* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *este cu creştere lentă atunci aplicaţia*

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

este distribuţie temperată.

Demonstraţie. Aplicaţia T_f este liniară

$$\langle T_f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle T_f, \varphi \rangle + \beta \langle T_f, \psi \rangle.$$

Funcţia f fiind cu creştere lentă, există $k \in \mathbb{N}$ şi $M \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k} \leq M \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m\, \varphi_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ şi prin urmare

$$|\langle T_f, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi_n(x)\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |\varphi_n(x)|\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k}\, |(1+x^2)^k \varphi_n(x)|\, dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |(1+x^2)^k \varphi_n(x)|\, dx$$

$$= M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(1+x^2)^{k+1} \varphi_n(x)|}{1+x^2}\, dx \leq M \sum_{m=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x^{2m} \varphi_n(x)|}{1+x^2}\, dx$$

$$\leq M \sum_{m=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^m \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{2m} \varphi_n(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\leq \pi M \sum_{m=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^m \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{2m} \varphi_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

adică

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_f,\varphi_n\rangle = 0.$$

5.3.15 Definiţie. Distribuţiile temperate definite de funcţii local integrabile cu creştere lentă sunt numite *distribuţii temperate regulate* sau de tip funcţie. Celelalte distribuţii sunt numite *distribuţii temperate singulare*.

5.3.16 Propoziţie. (Distribuţia Dirac). *Aplicaţia*

$$\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle\delta_a,\varphi\rangle = \varphi(a)$$

este o distribuţie temperată, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Aplicaţia δ_a este liniară

$$\langle\delta_a,\alpha\varphi+\beta\psi\rangle = \alpha\varphi(a)+\beta\psi(a) = \alpha\langle\delta_a,\varphi\rangle+\beta\langle\delta_a,\beta\rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

şi prin urmare

$$|\langle\delta_a,\varphi_n\rangle| = |\varphi_n(a)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

5.3.17 Se poate arăta că distribuţia Dirac δ_a este o distribuţie singulară. In cazul în care $a=0$ în loc de δ_0 se scrie simplu δ, adică avem

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0).$$

5.3.18 Propoziţie. (Derivarea distribuţiilor temperate). *Dacă*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuţie temperată atunci aplicaţia

$$f' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle$$

este de asemenea o distribuţie temperată, numită derivata *lui* f.

Demonstraţie. Aplicaţia f' este liniară

$$\langle f',\alpha\varphi+\beta\psi\rangle = -\langle f,\alpha\varphi'+\beta\psi'\rangle = -\alpha\langle f,\varphi'\rangle-\beta\langle f,\psi'\rangle = \alpha\langle f',\varphi\rangle+\beta\langle f',\psi\rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci şirul $(\varphi_n')_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}\langle f', \varphi_n\rangle = -\lim_{n\to\infty}\langle f, \varphi_n'\rangle = 0.$$

5.3.19 Propoziţie. *Operaţia de derivare a distribuţiilor temperate este liniară*

$$(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$$

şi continuă

$$f_n \longrightarrow f \quad \Longrightarrow \quad f_n^{(k)} \xrightarrow{n\to\infty} f^{(k)}.$$

Orice serie convergentă poate fi derivată termen cu termen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}.$$

Demonstraţie. Dacă $f_n \longrightarrow f$ atunci

$$\langle f_n^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k\langle f_n, \varphi^{(k)}\rangle \xrightarrow{n\to\infty} (-1)^k\langle f, \varphi^{(k)}\rangle = \langle f^{(k)}, \varphi\rangle.$$

5.3.20 Propoziţie. (Multiplicarea unei distribuţii cu x^k) *Dacă $k \in \mathbb{N}$ şi*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuţie temperată atunci aplicaţia

$$x^k f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle x^k f, \varphi\rangle = \langle f, x^k\varphi\rangle$$

este de asemenea o distribuţie temperată.

Demonstraţie. Aplicaţia $x^k f$ este liniară

$$\langle x^k f, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\langle f, x^k\varphi\rangle + \beta\langle f, x^k\psi\rangle = \alpha\langle x^k f, \varphi\rangle + \beta\langle x^k f, \psi\rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci şirul $(x^k\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}\langle x^k f, \varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f, x^k\varphi_n\rangle = 0.$$

5.3.21 Se poate arăta că aplicaţia

$$\vartheta f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \vartheta f, \varphi\rangle = \langle f, \vartheta\varphi\rangle$$

este o distribuţie dacă f este distribuţie şi dacă ϑ aparţine mulţimii $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ a funcţiilor indefinit derivabile

$$\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietatea că oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ există $m \in \mathbb{N}$ şi $C \in (0, \infty)$ încât

$$|\vartheta^{(k)}(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}.$$

5.3.22 Pentru a distinge variabila de alţi parametri care apar în expresie, vom scrie uneori $\langle f(x), \varphi(x)\rangle$ în loc de $\langle f, \varphi\rangle$, fără ca $f(x)$ să însemne valoarea lui f în punctul x sau $\varphi(x)$ să însemne valoarea lui φ în punctul x.

5.3.23 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt două constante fixate, $a \neq 0$ şi dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcţie local integrabilă atunci distribuţia definită de funcţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(x) = f(ax+b)$$

este

$$\langle T_g, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\,dx$$

adică

$$\Big\langle T_{f(ax+b)}, \varphi(x)\Big\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle T_{f(x)}, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle.$$

5.3.24 Propoziţie (Schimbarea de variabilă). *Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt două constante fixate, $a \neq 0$ şi dacă $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ este distribuţie atunci funcţionala*

$$f(ax+b) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle f(ax+b), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle$$

este de asemenea distribuţie.

5.3.25 Cazuri particulare importante:

$$\text{Translatia :} \qquad \langle f(x+b), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi\,(x-b)\rangle$$

$$\text{Omotetia :} \qquad \langle f(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle.$$

5.3.26 Exerciţiu. Să se arate că

$$\delta(x-b) = \delta_b \qquad \text{şi} \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta.$$

5.3.27 Definiţie. Spunem despre o distribuţie $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ că este *nulă pe o mulţime* deschisă $D \subset \mathbb{R}$ dacă

$$\langle f, \varphi\rangle = 0 \qquad \text{oricare ar fi } \ \varphi \ \text{ cu } \ \operatorname{supp}\varphi \subset D.$$

Complementara celei mai mari mulţimi deschise pe care f este nulă se numeste *suportul* lui f şi se notează cu $\operatorname{supp} f$.
Spunem că f este *distribuţie cu suport compact* dacă $\operatorname{supp} f$ este mulţime mărginită.

5.3.28 Distribuţia δ_a este cu suport compact (*punctual*) deoarece $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$.

5.3.29 O funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ absolut integrabilă, adică astfel încât

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

defineşte o distribuţie temperată T_f. Pe de altă parte, transformata sa Fourier

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\,dx$$

fiind continuă şi mărginită

$$|\mathcal{F}[f](\xi)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\right|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

defineşte o distribuţie temperată $T_{\mathcal{F}[f]}$ şi din relaţia

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\,dx\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(\xi)\,d\xi\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathcal{F}[\varphi](x)\,dx\end{aligned}$$

rezultă că

$$\langle T_{\mathcal{F}[f]}, \varphi\rangle = \langle T_f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle. \tag{5.3}$$

5.3.30 Teoremă. *Dacă*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuţie temperată atunci aplicaţia

$$\mathcal{F}[f] : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle$$

*este de asemenea o distribuţie temperată (*transformata Fourier *a lui f).*

Demonstraţie. A se vedea [9].

5.3.31 Propoziţie. *Transformarea Fourier a distribuţiilor*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) :\ f \mapsto \mathcal{F}[f], \qquad \langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle$$

este bijectivă şi continuă. Inversa ei este

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) :\ f \mapsto \mathcal{F}^{-1}[f], \qquad \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle.$$

Demonstraţie. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]], \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]]\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

şi

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle = \langle f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dacă $f_n \longrightarrow f$, adică dacă

$$\langle f_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle f, \varphi\rangle \qquad \text{oricare ar fi } \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

atunci

$$\langle \mathcal{F}[f_n], \varphi\rangle = \langle f_n, \mathcal{F}[\varphi]\rangle \longrightarrow \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle$$

şi prin urmare

$$f_n \longrightarrow f \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}[f_n] \longrightarrow \mathcal{F}[f].$$

5.3.32 Din relaţia (5.3) rezultă că transformarea Fourier a distribuţiilor poate fi privită ca o prelungire a transformării Fourier a funcţiilor.

5.3.33 Propoziţie. *Relaţiile*

$$(\mathcal{F}[f])^{(k)} = \mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k f] \qquad\qquad \mathcal{F}[f^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k\, \mathcal{F}[f].$$

au loc oricare ar fi distribuţia temperată f .

Demonstraţie. Utilizând proprietăţile transformării Fourier a funcţiilor obţinem

$$\begin{aligned}\langle (\mathcal{F}[f])^{(k)}, \varphi\rangle &= (-1)^k \langle \mathcal{F}[f], \varphi^{(k)}\rangle = (-1)^k \langle f, \mathcal{F}[\varphi^{(k)}]\rangle \\ &= (-1)^k \langle f, (-\mathrm{i}\xi)^k\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle (\mathrm{i}\xi)^k\, f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle \mathcal{F}[(\mathrm{i}\xi)^k\, f], \varphi\rangle \\ \langle \mathcal{F}[f^{(k)}], \varphi\rangle &= \langle f^{(k)}, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = (-1)^k \langle f, (\mathcal{F}[\varphi])^{(k)}\rangle \\ &= (-1)^k \langle f, \mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k \varphi]\rangle = (-1)^k \langle \mathcal{F}[f], (\mathrm{i}x)^k \varphi\rangle = \langle (-\mathrm{i}x)^k \mathcal{F}[f], \varphi\rangle\end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5.3.34 Transformarea Fourier joacă un rol fundamental în matematică şi aplicaţiile ei. Integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, x^k\, dx$$

nefiind convergentă pentru $k \in \mathbb{N}$, rezultă că funcţiile constante şi cele polinomiale nu admit transformate Fourier dacă ne limităm la abordarea clasică. Utilizarea distribuţiilor temperate largeşte considerabil posibilităţile de folosire a transformării Fourier în diverse modele matematice.

5.3.35 Propoziţie. *Dacă şirul de funcţii local integrabile $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform pe fiecare mulţime compactă la funcţia f atunci*

$$\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = T_f$$

şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} (T_{f_n})^{(k)} = (T_f)^{(k)} \qquad oricare\ ar\ fi\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ există $r > 0$ astfel încât $\operatorname{supp}\varphi \subset [-r, r]$.

Deoarece φ este funcţie mărginită avem $f_n\varphi \xrightarrow[[-r,r]]{u} f\varphi$ şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-r}^{r} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-r}^{r} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle T_f, \varphi\rangle.$$

5.3.36* Exerciţiu. Seriile de distribuţii

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \qquad \text{şi} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

sunt convergente.

Rezolvare. Deoarece $\left|\frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, seria de funcţii local integrabile

$$\frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

converge uniform la o funcţie f pe $\mathbb{R}$ (şi prin urmare, pe orice mulţime compactă). Conform propoziţiei anterioare, în spaţiul distribuţiilor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ are lor relaţia

$$\frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = f$$

care derivată termen cu termen de două ori conduce la

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = f''.$$

5.3.37* Exerciţiu. Dacă $a \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ atunci seriile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{na} \qquad \text{şi} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na}$$

sunt convergente.

Rezolvare. Aplicaţia

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \ \varphi \mapsto \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{na}, \varphi \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{n=0}^{k} \delta_{na}, \varphi \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \varphi(na)$$

este bine-definită şi liniară. Dacă $\varphi_m \longrightarrow 0$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ atunci există $r>0$ astfel încât

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\varphi_m \subseteq [-r,r], && \text{oricare ar fi } \ m=0,1,2,... \\ &\sup_{x\in[-r,r]}\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \xrightarrow{m\to\infty} 0, && \text{oricare ar fi } \ k=0,1,2,... \end{aligned}$$

Dacă $n_r \in \mathbb{N}$ este astfel încât $n_r a \le r < (n_r+1)a$ atunci

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty}\delta_{na}, \varphi_m \right\rangle = \lim_{k\to\infty}\left\langle \sum_{n=0}^{k}\delta_{na}, \varphi_m \right\rangle = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\varphi_m(na) = \sum_{n=0}^{n_r}\varphi_m(na)$$

şi

$$\left|\sum_{n=0}^{n_r}\varphi_m(na)\right| \le \sum_{n=0}^{n_r}|\varphi_m(na)| \le (1+n_r)\sup_{x\in[-r,r]}|\varphi_m(x)| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Convergenţa celei de a doua serii rezultă din relaţia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{na} = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_{na} + \sum_{n=1}^{\infty}\delta_{n(-a)}.$$

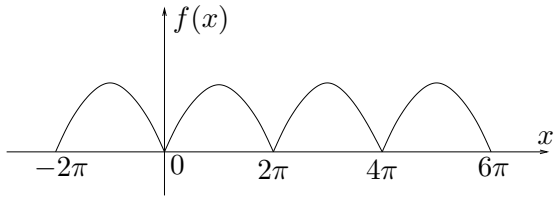

Figura 5.6: Graficul funcţiei f.

5.3.38* Teoremă. *In spaţiul distribuţiilor* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *are loc egalitatea*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Demonstraţie. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funcţia periodică cu perioada 2π definită prin relaţia

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} \qquad \text{pentru} \quad 0 \le x < 2\pi.$$

Funcţia local integrabilă f defineşte o distribuţie cu derivata de ordinul al doilea

$$f'' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{2n\pi}.$$

Seria Fourier corespunzătoare lui f converge uniform la f pe $\mathbb{R}$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = f(x).$$

Conform propoziţiei anterioare, în spaţiul distribuţiilor are loc relaţia

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = f$$

care derivată termen cu termen de două ori conduce la egalitatea

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n\neq 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = f''.$$

5.3.39 Propoziţie. *Formula de sumare a lui Poisson*

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](n)$$

are loc oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Am aratat (pag. 111-**38**) că în $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ are loc egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

adică,

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\, \varphi(x)\, dx\,, \qquad \text{oricare ar fi } \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Se poate arăta că seriile sunt convergente şi că relaţia are loc pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.3.40 Alegând în formula de sumare a lui Poisson

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{4\pi^2}}$$

obţinem [9] relaţia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-an^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{a}}\,, \qquad \text{oricare ar fi } \ a \in (0,\infty)$$

care se mai poate scrie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\kappa\pi n^2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\kappa} n^2}\,, \qquad \text{oricare ar fi } \ \kappa \in (0,\infty).$$

5.3.41 Noţiunile şi rezultatele prezentate se pot extinde la cazul bidimensional:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2) = \{\, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \;\mid\; \operatorname{supp}\varphi \text{ este compact} \,\}$$

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) = \{\, f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \; f \text{ este liniară şi continuă} \,\}$$

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_f, \varphi\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy$$

$$\delta_{(a,b)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \delta_{(a,b)}, \varphi\rangle = \varphi(a,b)$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \left\langle \tfrac{\partial f}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \tfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle$$

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \left\langle \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \tfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle, \qquad \text{etc.}$$

5.3.42 Propoziţie. *Dacă* $f, g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *sunt două distribuţii atunci funcţionala*

$$f \times g : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle f \times g, \varphi\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

este o distribuţie, numită produsul direct *al distribuţiilor* f *şi* g.

5.3.43 Din relaţia

$$\langle \delta_a \times \delta_b, \varphi\rangle = \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle \delta_a(x), \varphi(x,b)\rangle = \varphi(a,b)$$

rezultă că

$$\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}.$$

5.3.44 Definiţie. Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ două funcţii astfel încât integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

este convergentă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Funcţia

$$f * g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

se numeşte *convoluţia* funcţiilor f şi g.

5.3.45 Din relaţia

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, g(u)\, du = (g*f)(x)$$

rezultă că

$$f * g = g * f.$$

5.3.46 Definiţie. Spunem că şirul $(\eta_n)_{n\geq 0}$ din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *converge la* 1 în $\mathbb{R}^2$ dacă:

a) oricare ar fi $r > 0$ există $n_r \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n \geq n_r$ avem

$$\eta_n(x,y) = 1 \qquad \text{dacă} \quad x^2 + y^2 \leq r^2$$

b) oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$ există $C_k\in(0,\infty)$ astfel încât

$$|\eta_n^{(k)}(x,y)|\le C_k, \qquad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n\in\mathbb{N} \\ (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{matrix}$$

5.3.47 Propoziţie. *Dacă distribuţiile $f,g\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sunt astfel încât limita*

$$\lim_{n\to\infty}\langle f(x)\times g(y),\eta_n(x,y)\,\varphi(x+y)\rangle$$

există pentru orice funcţie $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ şi nu depinde de şirul $(\eta_n)_{n\ge0}$ convergent la 1 în $\mathbb{R}^2$ ales atunci funcţionala

$$f*g:\mathcal{D}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C},\quad \langle f*g,\varphi\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle f(x)\times g(y),\eta_n(x,y)\,\varphi(x+y)\rangle$$

este o distribuţie, numită convoluţia *distribuţiilor f şi g.*

5.3.48 Propoziţie. *Oricare ar fi distribuţia f avem*

$$f*\delta_b=\delta_b*f=f(x-b)$$

şi în particular,

$$f*\delta=\delta*f=f.$$

Demonstraţie. Dacă $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ şi dacă $(\eta_n)_{n\ge0}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ converge la 1 în $\mathbb{R}^2$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n(x,b)\,\varphi(x+b)=\varphi(x+b)$$

şi prin urmare

$$\begin{aligned}\langle f*\delta_b,\varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle f(x)\times\delta_b(y),\eta_n(x,y)\,\varphi(x+y)\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty}\langle f(x),\eta_n(x,b)\,\varphi(x+b)\rangle\\ &= \langle f(x),\varphi(x+b)\rangle=\langle f(x-b),\varphi(x)\rangle.\end{aligned}$$

5.3.49 Se poate arăta că $\mathcal{D}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ este un subspaţiu dens în $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Orice distribuţie cu suport compact

$$g:\mathcal{D}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C}$$

se poate prelungi unic până la o distribuţie

$$\tilde g:\mathcal{S}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C}$$

utilizând relaţia

$$\langle\tilde g,\varphi\rangle=\langle g,\eta\,\varphi\rangle$$

unde $\eta\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ este o funcţie aleasă astfel încât

$$\eta(x) = 1 \qquad \text{pe o mulţime deschisă ce include } \operatorname{supp} g.$$

Se poate arăta că $\mathcal{F}[g]$ este o distribuţia temperată regulată asociată funcţiei

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \langle g(x), \eta(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \rangle$$

şi aparţine spaţiului $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (a se vedea pag. 106-**21**).

5.3.50 Teoremă (Transformarea Fourier a convoluţiei).
Dacă $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ este o distribuţie temperată şi dacă
$g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este o distribuţie cu suport compact atunci

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[g] \cdot \mathcal{F}[f].$$

Demonstraţie. A se vedea [9]

5.3.51 Propoziţie. *Dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este local integrabilă cu creştere lentă şi*

$$F_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_r(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru} \quad |x| \le r \\ 0 & \text{pentru} \quad |x| > r \end{cases}$$

atunci

$$a) \qquad \lim_{r\to\infty} T_{f_r} = T_f$$

$$b) \qquad \lim_{r\to\infty} \mathcal{F}[T_{f_r}] = \mathcal{F}[T_f]$$

$$c) \qquad \mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, f(x)\, dx \qquad \text{în} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Demonstraţie. a) Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ are loc relaţia

$$\lim_{r\to\infty} \langle T_{f_r}, \varphi \rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle T_f, \varphi \rangle.$$

b) Transformarea Fourier a distribuţiilor fiind continuă avem

$$\lim_{r\to\infty} T_{f_r} = T_f \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \mathcal{F}[T_{f_r}] = \mathcal{F}[T_f].$$

c) Relatia de la b) se poate scrie succesiv sub formele

$$\lim_{r\to\infty} \langle \mathcal{F}[T_{f_r}], \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}[T_f], \varphi\rangle$$
$$\lim_{r\to\infty} \langle T_{f_r}, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle T_f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle$$
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx$$
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(\xi)\, d\xi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(\xi)\, d\xi\, dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\, dx\right] \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\, dx\right] \varphi(\xi)\, d\xi$$
$$\lim_{r\to\infty} \left\langle \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\, dx, \varphi(\xi)\right\rangle = \langle \mathcal{F}[f](\xi), \varphi(\xi)\rangle\,.$$

5.3.52 Dacă nu distingem două funcţii care diferă doar pe o mulţime de măsură nulă, *spaţiul funcţiilor de pătrat integrabil* (Lebesgue)

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

considerat împreună cu produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

este un spaţiu Hilbert.

5.3.53 Teoremă (Plancherel). *Transformarea Fourier*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

definită prin

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\, dx \qquad \hat{\imath}n \quad L^2(\mathbb{R})$$

este bijectivă, bicontinuă şi are loc egalitatea Parseval

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g]\rangle = 2\pi\, \langle f, g\rangle \qquad \textit{oricare ar } fi \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

5.3.54 In cazul particular $f = g$, egalitatea Parceval devine $||\mathcal{F}[f]||^2 = 2\pi\, ||f||^2$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2\, d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

5.3.55 Teoremă. *Dacă $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ atunci în $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ are loc egalitatea*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

Demonstraţie. Dacă $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ atunci $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in L^2(\mathbb{R})$. Din relaţiile

$$\left[\int |\mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)|\, d\xi\right]^2 \le \int |\mathcal{F}[f](\xi)|^2\, d\xi \int |\mathcal{F}[g](\xi)|^2\, d\xi < \infty$$

$$\begin{aligned}\left[\iint |f(t)\, g(x-t)\, \varphi(x)|\, dt\, dx\right]^2 &\le \left[\iint |f(t)|^2\, |\varphi(x)|\, dt\, dx\right] \left[\iint |g(x-t)|^2\, |\varphi(x)|\, dt\, dx\right] \\ &\le ||f||^2\, ||g||^2 \left[\iint |\varphi(x)|\, dt\, dx\right]^2 < \infty\end{aligned}$$

rezultă că $\mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]$ şi $f*g$ definesc distribuţii temperate. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f*g], \varphi\rangle &= \langle f*g, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \int \mathcal{F}[\varphi](x) \int f(t)\, g(x-t)\, dt\, dx \\ &= \int f(t) \int g(x-t)\, \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx\, dt \\ &= \int f(t) \int \mathcal{F}[g(x-t)](\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\, dt \\ &= \int f(t) \int \mathcal{F}[g](\xi)\, \varphi(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t} d\xi\, dt = \int \mathcal{F}[f](\xi)\, \mathcal{F}[f](\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

Capitolul 6

Transformarea Laplace a funcţiilor

6.1 Exemple

6.1.1

6.2 Aplicaţii

6.2.1

6.3 Definiţii şi rezultate fundamentale

6.3.1

Capitolul 7

Transformarea Laplace a distribuţiilor

7.1 Exemple

7.1.1

7.2 Aplicaţii

7.2.1

7.3 Definiţii şi rezultate fundamentale

7.3.1

Capitolul 8

Transformarea Laplace finită

8.1 Exemple

8.1.1

8.2 Aplicaţii

8.2.1

8.3 Definiţii şi rezultate fundamentale

8.3.1

Bibliografie

[1] R. J. Beerends et al., Fourier and Laplace Transforms, Cambridge University Press, 2003

[2] R. N. Bracewell, The Fourier Transform and Its Applications, Mc Graw Hill, 2000

[3] D. J. Brady, Optical Imaging and Spectroscopy, Wiley, 2009

[4] N. Cotfas, *Elemente de Algebra Liniara*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2009.

[5] N. Cotfas şi L. A. Cotfas, *Elemente de Analiză Matematică*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2010.

[6] M. Fox, Quantum Optics. An Introduction, Oxford University Press, 2006

[7] J. F. James, A Students Guide to Fourier Transforms, Cambridge University Press, 2011

[8] J. Kauppinen, J. Partanen, Fourier Transforms in Spectroscopy, Wiley-VCH, 2001

[9] V. S. Vladimirov, *Ecuaţiile Fizicii Matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[10] V. S. Vladimirov şi alţii, Culegere de Probleme de Ecuaţiile Fizicii Matematice, Editura Ştiinţifcă şi Enciclopedică , Bucureşti, 1981.

[11] `http://fpcm5.fizica.unibuc.ro/ ncotfas/`